ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 2 MAI 1932.

PRÉSIDENCE DE M. CHARLES RICHET.

1941/2 1932

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉTÉORITES. — *Chutes récentes de météorites en Afrique occidentale.* Note de M. **A. Lacroix**.

M. Auguste Chevalier vient de rapporter d'un voyage d'Algérie au Niger un fragment de météorite pierreuse. Sa découverte est due à un événement fortuit dont mon collègue m'a donné le récit suivant :

« Le 19 janvier 1932, vers 21 heures, me trouvant à Gao, sur le Niger (Colonie du Soudan), j'entendis une forte détonation semblable au bruit que ferait la déflagration d'une cartouche de dynamite. Les ouvertures de l'hôtel étant closes, je ne perçus aucune lumière, mais, le lendemain matin, différents Européens me racontèrent qu'ils avaient vu une lueur éclatante qui avait entouré tout le village et quelques instants après (de une à deux minutes suivant les divers informateurs) ils avaient entendu une détonation comparable à l'éclatement proche d'un obus de 75.

» D'autre part, M. Fronteau, entrepreneur de transports, revenant le même soir de Kidal et se trouvant vers 21 heures dans l'Oued Tilemsi, à 20 ou 30^{km} de Gao, perçut une lueur intense et quelques secondes après un bruit formidable. Il fut ébranlé; il crut que son moteur avait fait explosion et que son auto était en feu, mais aussitôt tout rentra dans le silence et l'obscurité.

» Le même jour, à la même heure, un géologue, M. Reformatsky, qui se trouvait aux environs de Filingué, à 300 ou 400^{km} au sud-est de Gao, aperçut un forte lueur, mais n'entendit pas de bruit.

» Il est donc vraisemblable que, le 19 janvier, une météorite est tombée

aux environs de Gao, au Nord-Est suivant certains témoins, au Sud-Est suivant d'autres. La chute a dû se faire à 20 ou 30km de Gao, dans un lieu désert, parcouru seulement par les Nomades. Les recherches faites pour la retrouver sont restées sans résultat. »

Le lendemain de cet événement, les indigènes de Gao étaient fort agités. L'un d'eux en dit la cause à M. Chevalier : les livres arabes consultés par les lettrés leur avaient appris que la chute d'un bolide (benatondi), survenant au cours du mois de janvier, est l'indice d'une guerre prochaine. Son boy peulh ayant entendu la conversation lui dit peu après : « Je connais bien cela, la même chose s'est produite dans mon village, il y a quelques années, et le commandant blanc a fait ramasser des pierres tombées du ciel à ce moment ; je les ai vues. » Cet indigène était originaire de Birni N'Konni, poste situé à l'est de Niamey, dans la Colonie du Niger et sur la frontière de la Nigeria du Nord.

Ce village était sur l'itinéraire de M. Chevalier ; lorsque onze jours plus tard, cet explorateur l'atteignit, son premier soin fut de faire une enquête qui confirma le récit du boy. Une météorite était bien tombée, en avril ou mai 1923, à 6km de Birni N'Konni, entre les villages de Dongo et de Rougoumaoua, près de la mare appelée lac de Kalmalo, celle-ci est en territoire anglais.

Deux morceaux de la pierre avaient été recueillis par les soins de l'administrateur de Birni N'Konni ; mais celui-ci semble n'y avoir pas attaché beaucoup d'importance, il les conserva cependant longtemps comme presse-papier ; deux administrateurs se sont succédé depuis lors dans ce poste, et ces échantillons n'ont pu être retrouvés. Par contre, un troisième morceau a été trouvé en possession d'un chef indigène qui le gardait précieusement comme fétiche ; c'est cette pierre, du poids de 560g, qui a été rapportée au Muséum.

Elle a la forme d'un polyèdre irrégulier à quatre faces ; deux sont dues à des cassures artificielles ; les deux autres, d'origine primaire, très bosselées, sont recouvertes par une croûte uniforme, terne et rugueuse, d'un brun noirâtre.

La roche est dure et tenace, de couleur grise, tachetée de rouille, elle a dû être conservée dans un milieu humide.

Sur une surface polie, apparaissent de nombreuses petites grenailles de fer nickelé ; irrégulières, parfois allongées, elles englobent, çà et là, des grains de troïlite. De petits chondres se voient à la loupe ; ils sont généra-

lement de couleur plus foncée que le milieu microgrenu dans quoi ils sont solidement encastrés et dont ils ne peuvent être détachés. Il n'existe pas de veinules.

Il s'agit là d'une chondrite plioferrifère de ma classification [1], d'une chondrite grise de celle de Tschermak-Brezina. Sa densité est de 3,59.

Au microscope, la structure se montre tufacée, les chondres d'olivine et de bronzite sont assez nombreux au milieu de débris des mêmes minéraux. De loin en loin, apparaissent quelques cristaux de clino-bronzite, à fines macles polysynthétiques, parfois bordés d'un étroit liséré de diopside-bronzite plus biréfringent et à extinctions plus grandes. Il existe une très petite quantité de feldspath non maclé, intersertal.

Les chondres sont très variés de structure et de composition quantitative. Je citerai, en particulier, ceux où l'olivine constitue une grille à barreaux parallèles dont les intervalles sont remplis par du fer métallique ou bien par des baguettes de bronzite groupées à axes parallèles, mais d'orientation différente de l'olivine. Quelques chondres de bronzite ont une structure plus compliquée que d'ordinaire; le groupement sphérolitique, à point de départ excentrique, ne les constitue pas entièrement, une partie du chondre est constituée par de petites aiguilles enchevêtrées du même minéral.

Le fer métallique enveloppe les débris de minéraux aussi bien que les chondres. L'examen microscopique par réflexion le montre homogène et dépourvu de macles.

En résumé, cette météorite présente toutes les particularités d'un type assez commun de sporadosidère.

GÉOLOGIE. — *Existence de nombreux grains de quartz, d'origine éolienne, dans l'Ordovicien des environs de Leningrad.* Note [2] de M. **L. Cayeux.**

L'Ordovicien des environs de Leningrad, d'une richesse en glauconie qui lui imprime une physionomie très aberrante, se singularise encore par l'existence de phénomènes éoliens, enregistrés à deux niveaux différents.

---

[1] A. Lacroix, *Les météorites tombées en France et dans ses colonies et conservées au Muséum national d'histoire naturelle, avec remarques sur la classification des météorites* (*Bull. Muséum*, Paris, 1929, p. 415).

[2] Séance du 25 avril 1932.

D'après F. Schmidt (¹), ce terrain débute par un *sable glauconieux* (B_1), épais de $0^m,30$ à 3^m, que surmonte un *calcaire glauconieux* (B_2), d'une puissance variant de $3^m,60$ à 12^m.

1° De l'étude des matériaux que je dois à l'obligeance du regretté Th. Tschernyschew, il résulte que le sable glauconieux de base est, en réalité, une roche meuble ou faiblement cohérente, revêtant à l'œil nu l'apparence d'une craie extrêmement glauconieuse, en voie de désagrégation. Au microscope, le dépôt n'a rien d'une craie proprement dite. Des préparations tirées de parties agglutinées d'un sable de Popowka montrent de la glauconie typique, en telle abondance que ses éléments se touchent souvent. Les grains verts, d'un diamètre compris entre $0^{mm},02$ et $0^{mm},2$, ont une forme générale arrondie, mamelonnée, subanguleuse, voire même anguleuse. Pas un seul élément n'évoque l'idée d'un moule de Foraminifère.

Pour apprécier à sa valeur la caractéristique minéralogique tirée de la présence et de la profusion de la glauconie dans ces dépôts très anciens, il suffit de se rappeler qu'en France, notamment, ce minéral ne fait son apparition qu'au début des temps secondaires, et qu'il témoigne, en moyenne, d'une grande rareté jusqu'à l'Infracrétacé, où son développement prend un essor considérable.

Le quartz affecte trois manières d'être :

A. Grains, nombreux, en forme de dragées, quelquefois subsphériques et même sphériques, mesurant jusqu'à $0^{mm},5$ de diamètre. Les plus répandus ont un plus grand diamètre d'environ $0^{mm},4$. Leur surface est pareille, en tous points, à celle des grains de quartz éoliens, les plus typiques des dunes de Gascogne, c'est-à-dire qu'elle est très finement écailleuse.

B. Grains anguleux, à la fois moins gros et moins fréquents que les éléments d'origine éolienne.

C. Quartz formant une abondante poussière de granules et d'un diamètre souvent inférieur à 1 μ.

Il s'ensuit qu'une même plage réunit des granules et des grains de quartz dont le diamètre varie dans le rapport de 1/500 et même moins.

Cette constitution ne répond nullement à celle d'un sable d'origine exclu-

---

(¹) F. Schmidt, *On the Silurian (and Cambrian) Strata of the Baltic Provinces of Russia as compared with those of Scandinavia and the Bristish Isles* (*Q. J. G. S.*, 38, 1882, p. 514-536, pl. XXIII); *Kurze Uebersicht der Geologie der Umgebung von Saint-Petersbourg* (*Guide des excursions du VIIe Congrès géol. int.*, 34, 1897, 14 pages, 1 carte).

sivement marine. A la vérité, le quartz en grains arrondis fait figure de corps étranger dans le milieu, lorsqu'on examine les coupes minces des parties consolidées, et si on les supprime par la pensée, la roche perd ce qu'elle a d'exceptionnel dans sa constitution.

2° Le même contraste s'observe dans un calcaire glauconieux de Jambourg, avec cette différence que les matériaux d'origine éolienne sont plus fréquents et de taille en moyenne un peu plus élevée, les plus gros ne dépassant pas $0^{mm},6$.

Conclusions. — Une expérience déjà longue nous enseigne que l'analyse des sédiments au microscope est susceptible de fournir de nombreuses et précieuses données sur le régime des mers anciennes. Les exemples précédents nous apprennent qu'au surplus elle peut nous éclairer sur certaines conditions atmosphériques des temps passés. C'est ainsi que l'étude micrographique des sables et calcaires glauconieux ordoviciens des environs de Leningrad nous révèle qu'à une époque aussi reculée que le Silurien l'atmosphère a été le théâtre, dans la région baltique, de mouvements assez importants pour transporter et façonner des grains de sable, dont le caractère éolien est beaucoup plus tranché que celui des matériaux de nos grandes dunes sahariennes.

Il est juste de rappeler à cette place que Nathorst (¹) a signalé, dans le conglomérat de base du Cambrien, dans le Vestgötland, en Scandinavie, des cailloux à facettes dont la morphologie spéciale résulterait également d'actions éoliennes. En sorte que les mouvements de l'atmosphère ont laissé des traces profondes dans le domaine baltique aux époques cambrienne et ordovicienne.

MÉDECINE EXPÉRIMENTALE. — *La peste porcine est transmissible expérimentalement à l'homme sous la forme inapparente.* Note de MM. **Charles Nicolle** et **L. Balozet.**

La notion d'infection inapparente étend, pour chaque maladie infectieuse, la liste des espèces sensibles. Elle l'augmente du nombre de celles qui peuvent héberger un virus sans manifester de signes, appréciables cliniquement. Prenant des exemples dans la pathologie humaine, nous rappellerons que le typhus de l'Ancien Monde ne se manifeste que sous la

(¹) A. G. Nathorst, *Om kambriska pyramidalstenar* (*Ofver. af K. Vetensk. Akad. Förhandl.*, n° 10, 1885, p. 5-17, fig. 1-4).

forme inapparente chez les muridés inoculés, qu'il en est de même de la dengue chez le cobaye, de la syphilis pour la souris, de la variole pour le chien, et de nos spirochétoses pour un grand nombre d'espèces. Dans le groupe des maladies naturelles des animaux domestiques, la forme inapparente de l'anémie infectieuse des équidés chez le porc nous offre un exemple connu depuis assez longtemps, bien que la portée générale du fait ait échappé aux savants qui l'ont découvert. W. de Kock ([1]), reprenant les expériences de la Commission Japonaise, chargée de l'étude de cette maladie, et celles de Luhrs, d'Habersang et de Kutsche, a établi que le porc, inoculé avec le virus anémique, ne manifestait aucun trouble, mais que son sang était virulent le 42e et le 117e jour après l'inoculation. Dans le même domaine vétérinaire, Jacotot ([2]) a récemment montré que le lapin et le porc sont sensibles au virus de la peste bovine, mais qu'ils contractent cette maladie seulement sous la forme inapparente.

Commensal des animaux domestiques, l'homme reçoit vraisemblablement d'eux un certain nombre de maladies qui évoluent chez lui sans symptômes et, par conséquent, passent inaperçues. L'un de nous ([3]), l'an dernier, a montré qu'une des maladies animales les plus répandues : la maladie du jeune âge des chiens, lui est transmissible sous la forme inapparente. Nous apportons aujourd'hui un nouvel exemple de même ordre avec la peste porcine.

Un sujet reçoit sous la peau 5$^{cm^3}$ de sang de porc pestique (virus A. P. A.). Le cinquième jour après cette inoculation, le sujet, qui ne présente et ne présentera par la suite aucun symptôme, est saigné, et son sang est inoculé à deux porcelets : l'un d'eux en reçoit 5$^{cm^3}$, l'autre 55$^{cm^3}$. Le premier montre au cinquième jour de l'inoculation une élévation thermométrique, suivie de l'évolution de la maladie dont il meurt le vingt-quatrième jour. Le deuxième porcelet a montré sa première réaction thermométrique le quatrième jour; elle a été suivie d'une maladie grave qui a provoqué la mort au dix-neuvième jour.

L'homme est donc sensible au virus de la peste porcine sans que l'infection que lui confère ce virus se traduise par le moindre symptôme apparent.

([1]) W. de Kock, *A contribution to the study of virus, haematology and pathology of Infectious Anaemia of Equines under South African conditions* (9 th *and* 10 th *Reports of the Director of Veterinary Education and Research*, 1923, Pretoria).

([2]) H. Jacotot, *Études sur la peste bovine* (*Ann. de l'Institut Pasteur*, **48**, 1932, p. 377-399).

([3]) *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 1069.

Seule, l'inoculation du sang du sujet à des porcs sensibles peut révéler l'infection. S'il était établi que l'homme puisse être infecté, dans les conditions naturelles, comme il l'est dans les conditions expérimentales que nous avons réalisées, son rôle dans la propagation des épizooties porcines prendrait un caractère actif au lieu du caractère passif qu'on lui accorde aujourd'hui.

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *L'état de la chaux et de l'acide phosphorique dans le lait de vache.* Note de M. **Ch. Porcher** et M[lle] **J. Brigando**.

La répartition de la chaux et de l'acide phosphorique dans le lait de vache a fait l'objet de nombreuses recherches s'appuyant principalement sur des méthodes physiques qui permettent, lorsqu'elles sont judicieusement employées et interprétées, d'avoir de cette répartition une notion exacte. Elles nous montrent que l'acide phosphorique et la chaux sont cristalloïdes pour une part et colloïdes pour le reste, et qu'en ce qui concerne les relations de l'un et de l'autre avec la caséine, les faits nous mettent dans l'obligation d'admettre que la caséine *en son entier*, l'acide phosphorique et la chaux *en partie*, sont rassemblés dans un *complexe caséinate de calcium + phosphates de calcium*, en lequel réside la propriété biochimique caractéristique du lait, celle de faire bloc sous l'action de la présure.

Quand on filtre du lait sur une bougie de porcelaine, on recueille d'une part un liquide, *le sérum* qui traverse la paroi poreuse de la bougie et renferme tous les cristalloïdes du lait ainsi qu'une partie de l'albumine et, d'autre part *un enduit*, qui contient essentiellement tout le caséinate calcique et un mélange de phosphate bi- et tri-calciques insolubles.

En délayant cet enduit dans le sérum, on reconstitue le lait originel qui va coaguler sous l'action d'une présure suffisamment dialysée pour être débarrassée de toute charge saline. *Par contre, en délayant cet enduit dans de l'eau distillée*, on réalise une liqueur homogène laiteuse, mais qui ne coagule plus par l'apport de la présure ci-dessus; tout au plus, obtient-on, et encore tardivement, quelques flocons que l'on ne retrouve plus quand la liqueur laiteuse est filtrée à son tour sur une bougie de porcelaine et qu'on la reconstitue en délayant dans de l'eau distillée le nouvel enduit obtenu. Si l'on ajoute à la liqueur laiteuse du premier délayage, que l'on peut considérer comme une solution colloïdale du complexe naturel, un peu d'un sel soluble de calcium, la coagulation par la présure se fera en un bloc comme celle du lait lui-même.

La filtration sur bougie de porcelaine, en éliminant les sels solubles de calcium qui sont passés dans le sérum, a laissé sur la paroi un *enduit que nous savons fait de phosphates insolubles et de caséinate de calcium*. En l'absence d'un sel soluble calcique, la liqueur provenant du délayage de ce mélange dans l'eau distillée ne peut coaguler la présure; elle récupère cette propriété, comme on vient de le voir, par l'addition d'un sel de calcium soluble dont l'anion importe peu.

Lorsqu'on dialyse du lait, les phosphates insolubles de son propre complexe ne peuvent traverser la membrane puisqu'ils affectent l'état colloïdal sous la forme de grains assez gros. Mais l'acide phosphorique et la chaux cristalloïdes, — il s'agit ici de l'acide phosphorique, des phosphates alcalins normaux d'une part, de la chaux du citrate tricalcique ainsi que du phosphate monocalcique d'autre part — traversent, eux, la membrane du dialyseur. Les dialysats obtenus, examinés avant qu'on ne les chauffe, sont absolument limpides, sans la moindre amorce de précipité; les masses en présence et la réaction du milieu font qu'il n'y a aucune formation de phosphate calcique insoluble, bien que nous ayons en présence de l'acide phosphorique et de la chaux.

Si l'on porte les dialysats au bain-marie jusqu'à siccité, des interréactions se produisent par paliers entre les phosphates alcalins et les sels calciques susdits qu'ils renferment pour aboutir à la formation de phophate tricalcique; mais de là à admettre [1] qu'il s'agit de phosphate tricalcique « enlevé » par dialyse, il y a loin; *ce phosphate tricalcique, recueilli par évaporation au bain-marie des eaux de dialyse, n'était nullement préformé*. L'étude de la mécanique chimique des phosphates calciques, sur laquelle nous reviendrons plus tard, le montre.

Quand on parle d'étudier ce que l'un de nous a appelé la constitution du lait en recourant à des moyens physiques simples comme la centrifugation et surtout la dialyse, *il faut absolument rester dans les limites que l'emploi de ces moyens vous impose et ne faire intervenir aucune masse chimique étrangère, aucun apport salin susceptible de troubler considérablement, au point de les déformer tout-à-fait, les équilibres antérieurs*. Or c'est ce que n'a pas fait M. Piettre, qui a procédé à *la dialyse du lait en présence de quantités considérables de citrate sodique :* 35^g par litre. Nous laisserons de côté le recours au citrate monosodique, sel encore très acide, dont la constante de dissociation, plus grande que celle de la caséine, nous permet de comprendre qu'il précipite en flocons la caséine de son sel calcique

(1) M. Piettre, *Comptes rendus*, 193, 1931, p. 1041.

originel, et nous ne retiendrons que les deux autres citrates, le bi- et le trisodique. Ils font disparaître complètement l'opacité du lait par double décomposition entre eux et le caséinate calcique et ceci est régulier. En raison de leur forte masse, la caséine du caséinate calcique, passe presque en son entier à l'état de caséinate sodique aux solutions translucides, pendant que, de son côté, la chaux du caséinate calcique, alors *colloïdale et micellaire* sous cette forme saline, revêt du fait de la double décomposition ci-dessus, l'aspect de citrate calcique, *cristalloïde et dialysable*.

Si l'on fait les calculs des quantités de soude correspondant à 35^g de citrate trisodique, on voit qu'il y a, en chiffres ronds, un apport de quarante molécules de soude pour une seule molécule de chaux relevant du caséinate.

L'un de nous (¹) a montré antérieurement que, dans la dialyse d'une solution de caséinate calcique additionnée de chlorure de sodium, la chaux du caséinate passe presque en son entier au travers du dialyseur, ce qu'elle ne fait point en l'absence d'un sel sodique. Dans cette expérience, les quantités de soude apportées par le chlorure de sodium n'étaient moléculairement que six fois plus fortes que celles de la chaux du caséinate et non pas quarante fois comme dans l'expérience de M. Piettre réalisée sur du lait.

La loi d'action de masses joue quel que soit l'état physique des sels en présence, cristalloïde ou colloïdal, et c'est pour en avoir méconnu l'intervention dans ses propres expériences que M. Piettre a tiré de celles-ci des conclusions que nous estimons erronées.

NOMINATIONS.

M. H. Villat est désigné pour faire partie de la délégation de l'Académie au *Cinquième centenaire de l'Université de Caen*.

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts invite l'Académie à lui désigner 14 de ses Membres qui occuperont, dans le *Conseil*

(¹) Ch. Porcher, *Le lait au point de vue colloïdal* (*Th. doct. ès sc. phys.*, Lyon, 1929).

National de l'Office national des Recherches scientifiques et des Inventions, les places qui vont devenir vacantes par l'expiration des pouvoirs des Membres élus en 1928.

M. **Emmanuel de Martonne** prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à la place vacante dans la Section de Géographie et Navigation par le décès de M. *G. Ferrié*.

M. **Émile Belot** prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à la place vacante dans la Section d'Astronomie par le décès de M. *G. Bigourdan*.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur la convergence des probabilités en chaîne*. Note de M. **Maurice Fréchet**, présentée par M. Hadamard.

Un système matériel déterminé pouvant, par hypothèse, se présenter sous un nombre fini fixe d'états incompatibles : $E_1, \ldots, E_r$, Markoff considère ces états comme *en chaîne*, s'il y a une probabilité determinée $P_{jk}^{(n)}$ pour que le système passe en n épreuves de l'état E_j à l'état E_k. Les résultats obtenus à ce sujet par Markoff sont résumés dans un intéressant Ouvrage de M. Hostinsky (*Méthodes générales du Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, 1931).

A l'occasion de mon cours du premier semestre 1931-32, j'ai pu compléter sur certains points les travaux de Markoff.

Posons $p_{jk} = P_{jk}^{(1)}$. Le cas simple où le déterminant des p_{jk} se réduit à $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ montre que $P_{jk}^{(n)}$ peut ne pas tendre vers une limite déterminée quand n croît. Il est donc intéressant d'observer qu'on retombe sur la convergence quand on entend celle-ci au sens de Cesaro, c'est-à-dire quand on substitue à la suite des $P_{jk}^{(n)}$ la suite de leurs moyennes arithmétiques,

$$\Pi_{jk}^{(n)} = \frac{1}{n}[P_{jk}^{(1)} + P_{jk}^{(2)} + \ldots + P_{jk}^{(n)}],$$

Il est d'autant plus indiqué d'étudier le comportement des $\pi_{jk}^{(n)}$ que ces quantités ont une signification simple. En effet, $\pi_{jk}^{(n)}$ est la valeur moyenne $\mathfrak{M} f_{jk}^{(n)}$ de la fréquence de l'état E_k au cours d'une suite de n épreuves, à partir de l'état E_j.

On obtient ainsi un certain nombre de résultats que je crois nouveaux :

1. *Les probabilités itérées* $P_{jk}^{(n)}$ *convergent* TOUJOURS, *au sens de Cesaro, vers des limites respectives* π_{jk}.

2. *Les différences* $(\pi_{jk}^{(n)} - \pi_{jk})$, *infiniment petites avec* $1/n$, *sont* TOUJOURS *d'un ordre au moins égal à celui de* $1/n$.

3. *La condition nécessaire et suffisante pour que les limites* π_{jk} *des valeurs moyennes,* $\pi_{jk}^{(n)} = \mathfrak{M} f_{jk}^{(n)}$, *des fréquences* $f_{jk}^{(n)}$, *soient indépendantes de l'état initial* E_j, *est que l'unité ne soit que racine simple de l'équation « en s »,* $\Delta(s) = 0$ *avec*

$$\Delta(s) \equiv \begin{vmatrix} p_{11} - s & p_{21} & \cdots & p_{r1} \\ p_{12} & p_{22} - s & \cdots & p_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1r} & p_{2r} & \cdots & p_{rr} - s \end{vmatrix}$$

4. *La condition nécessaire et suffisante, pour que les limites* Π_{jk} *des valeurs moyennes* $\pi_{jk}^{(n)}$ *des fréquences* $f_{jk}^{(n)}$ *soient indépendantes de l'état initial* E_j *et de l'état final* E_k, *est que : 1° l'unité ne soit que racine simple de* $\Delta(s)$, *2° on ait*

$$(T_1') \qquad \sum_{j=1}^{r} p_{jk} = 1$$

(en outre de la condition, *toujours vérifiée*

$$\sum_{k=1}^{r} p_{jk} = 1).$$

Revenons à l'*étude directe des* $P_{jk}^{(n)}$. Appelons *cas semi-régulier*, le cas où les $P_{jk}^{(n)}$ ont chacun une limite correspondante P_{jk} $(= \pi_{jk})$ quand n croît, et *cas régulier* le cas où chaque $P_{jk}^{(n)}$ a une limite P_k indépendante de l'état initial E_j.

On peut démontrer que, dans le cas semi-régulier, la série

$$(1) \qquad s_{jk} = \sum_{t=1}^{t=+\infty} (P_{jk}^{(t)} - P_{jk})$$

est absolument convergente. Ceci permet de préciser la proposition 2, *dans le cas semi-régulier; on a alors en effet*

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} n(\Pi_{jk}^{(n)} - P_{jk}) = s_{jk}.$$

D'autre part,

5. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas semi-régulier est que l'équation en s,* $\Delta(s) = 0$, *n'ait pas d'autres racines de module 1 que l'unité.*

En combinant cette dernière proposition avec les précédentes, on obtient des énoncés que j'ai démontrés d'une autre manière dans mon cours et qui ont été aussi obtenus indépendamment par les élèves de M. Hostinsky.

Dispersion. — Soient $\mathcal{E}_{jk}^{(n)}$, $\mathcal{G}_{jk}^{(n)}$ les écarts quadratiques moyens de la fréquence $f_{jk}^{(n)}$ avec sa moyenne $\pi_{jk}^{(n)}$ et avec la limite π_{jk} de celle-ci. Markoff avait démontré que, dans le cas positivement régulier, les quantités $\sqrt{n}\,\mathcal{E}_{jk}^{(n)}$, $\sqrt{n}\,\mathcal{G}_{jk}^{(n)}$ ont chacune une limite quand n croît et que ces limites sont égales. Grâce à l'introduction des s_{jk}, on peut chiffrer simplement cette imite commune.

6. *Dans le cas régulier, on a*

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty}\left[\sqrt{n}\,\mathcal{E}_{jk}^{(n)}\right] = \lim_{n \to \infty}\left[\sqrt{n}\,\mathcal{G}_{jk}^{(n)}\right] = P_k(1 - P_k + 2s_{kk}).$$

Dans le cas semi-régulier, les deux premiers membres ne sont peut-être pas finis, mais $\mathcal{E}_{jk}^{(n)}$ et $\mathcal{G}_{jk}^{(n)}$ ont certainement des limites finies et égales.

On déduit aussi des théorèmes ci-dessus des énoncés correspondants, pour le comportement de la valeur moyenne d'une fonction $\varphi(E)$ dont la valeur est déterminée à chaque épreuve par l'état $E_1, E_2, \ldots, E_r$ qui s'est produit.

Cas général. — En ce qui concerne le cas général, le théorème suivant permet de se former une idée du comportement des $P_{jk}^{(n)}$:

8. *Chaque probabilité itérée* $P_{jk}^{(n)}$ *est* TOUJOURS *la somme de deux termes, dont l'un tend vers une limite déterminée* Π_{jk} *quand n croît, tandis que l'autre reprend périodiquement les mêmes valeurs* (de N en N épreuves, N étant déterminé au moyen de l'équation en s quand ce second terme n'est pas nul).

Ces diverses propositions sont démontrées dans un Mémoire qui paraîtra incessamment. Dans un autre Mémoire sous presse est étudié le cas d'un ensemble continu d'états possibles.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles.* Note de M. **G. Cerf**, présentée par M. Goursat.

1. Le but de la présente Note est d'indiquer une méthode de recherche des intégrales d'un système différentiel quelconque S, avec quelques exemples simples.

On forme le système de Pfaff, de classe c, Σ, équivalent à S et l'on cherche à lui adjoindre des équations aux différentielles totales, aux mêmes variables, pour former un système de Pfaff Σ_1 dont la classe c_1 soit inférieure à c. Ce problème est lié au suivant : du système de Pfaff qui définit

les éléments singuliers de Σ extraire des équations dont le système soit de classe inférieure à c.

Dans des cas favorables, par l'intégration d'équations différentielles déduites de Σ_1, et contenant une ou plusieurs fonctions arbitraires, puis par des calculs d'élimination, on obtiendra des intégrales de S. S'il est possible de trouver des systèmes Σ_1 d'un degré de généralité suffisant, on peut espérer déterminer ainsi toutes les intégrales de S.

On voit que, au fond, cette méthode consiste à rechercher des systèmes différentiels qui admettent avec S des intégrales communes dépendant (en général) de constantes arbitraires; elle constitue, dans une certaine mesure, une généralisation de la méthode de Darboux et des recherches de M. Drach.

II. Nous allons en esquisser l'application aux équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, à deux variables indépendantes. Soit, avec les notations habituelles, une équation (E)

$$r = f(x, y, z, p, q, s, t).$$

Le système Σ est ici de classe 7 :

$$(1) \qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - f\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0. \end{cases}$$

Cherchons à adjoindre à Σ une équation aux différentielles totales aux sept variables x, y, z, p, q, s, t pour que le système Σ_1 des quatre équations soit de classe 6; soient $u_1, u_2, \ldots, u_6$ un système de variables caractéristiques de Σ_1; ce sont six fonctions indépendantes de $x, \ldots, t$. Posons, par exemple, u_6 fonction arbitraire de u_5 :

$$(2) \qquad u_6 \varphi(u_5).$$

De Σ_1, nous déduisons un système d'équations différentielles ordinaires en u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 dont l'intégration fournit quatre relations

$$(3) \qquad H_i(u_1, \ldots, u_5) = c_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les 5 relations (2) et (3) peuvent être en général résolues par rapport à z, p, q, s, t et fournissant des intégrales de (E) qui dépendent de la fonction arbitraire φ et des constantes c_i.

Appelons λ_1 et λ_2 les deux racines (supposées distinctes) de l'équation

$$\lambda^2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

la quatrième équation aux différentielles totales doit être de la forme

$$ds + \lambda_1\, dt - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx = \eta(dy - \lambda_2\, dx),$$

où η est une fonction de $x \ldots t$ à déterminer et où $(\partial f/\partial y)$ a la signification habituelle. Pour que Σ_1 soit de classe 6, il est nécessaire que f et η satisfassent à un système de deux équations aux dérivées partielles : du premier ordre en η, du deuxième ordre en f; les deux équations de ce système pouvant être résolues par rapport à $\partial\eta/\partial t$ et $\partial^2 f/\partial t^2$, il existe certainement une classe étendue d'équations (E) auxquelles on peut appliquer la méthode; il reste à discuter, f étant connue, le degré de généralité de η.

Ainsi donc, une équation (E) de la classe obtenue étant proposée, toute solution particulière du système en η permet de déterminer, par l'intégration d'équations différentielles, des intégrales de (E) qui dépendent d'une fonction arbitraire.

Considérons, par exemple, le cas où f ne dépend que de s et t : si l'équation admet un système de caractéristiques du premier ordre, les deux conditions en f et η se réduisent à une seule; toutes les équations de cette espèce appartiennent, dès lors, à la classe obtenue.

III. Dans le cas d'une équation quelconque du deuxième ordre à un système de caractéristiques du premier ordre, E', du système Σ, on peut déduire un système de deux équations de classe 7, Σ'; on cherchera une équation aux différentielles totales qui, adjointe à Σ', forme un système Σ'_1, de classe 5; la nouvelle équation doit être une combinaison des équations des caractéristiques du premier ordre de E'; la question présente des relations avec le problème de Bäcklund.

Si E' possède un invariant du premier ordre, la méthode se confond avec celle de Darboux.

Il est clair que les considérations précédentes s'étendent aux systèmes prolongés de Σ; elles s'appliquent d'ailleurs déjà aux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les dérivées normales des fonctions harmoniques dans le problème de Dirichlet.* Note de M. **Florin Vasilesco**, présentée par M. Henri Villat.

Dans une Note précédente (¹), j'ai été conduit, par un problème d'hydrodynamique, à chercher les dérivées normales d'une fonction harmonique

(¹) *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 1162.

donnée par des valeurs sur une sphère. La méthode que j'ai utilisée est basée sur l'emploi des fonctions sphériques. Si M_0 est un point fixe sur la sphère Σ de rayon unité (il suffit d'envisager ce cas), M un point variable de coordonnées γ et θ ([1]), et $U(M) = U(\gamma, \theta)$ une fonction donnée sur Σ, en appelant $W(P)$ la fonction harmonique définie dans tout l'espace, régulière à l'infini et prenant sur Σ les valeurs $U(M)$, on obtient pour les dérivées normales en M_0, extérieure et intérieure ([2]), les expressions :

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{dW_e}{dn} = -\dfrac{U(M_0)+U(M_\pi)}{2} - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^\pi d\gamma \int_0^{2\pi} \dfrac{U'_\gamma(\gamma, \theta)}{\sin\frac{\gamma}{2}}\, d\theta, \\[2ex] \dfrac{dW_i}{dn} = -\dfrac{U(M_0)-U(M_\pi)}{2} + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^\pi d\gamma \int_0^{2\pi} \dfrac{U'_\gamma(\gamma, \theta)}{\sin\frac{\gamma}{2}}\, d\theta. \end{cases}$$

M_π étant le point opposé de M_0, $U'_\gamma(\gamma, \theta)$ existant sur tout grand cercle passant par M_0 et $U''_\gamma(\gamma, \theta)$ seulement dans le voisinage de $\gamma = 0$, les deux dérivées étant continues pour l'ensemble (γ, θ). Ces formules se prêtent aisément à l'étude des dérivées normales. Je renvoie pour une telle étude à un Mémoire qui paraîtra prochainement.

J'ai été naturellement conduit à chercher, par une méthode analogue, les dérivées normales dans le cas du plan.

M. Picard s'est déjà occupé de cette question et en a souligné l'intérêt ([3]). Il avait surtout pour but la recherche de l'existence de la dérivée normale, dont il donne l'expression. M. H. Villat, dans ses recherches d'hydrodynamique, a également été conduit à obtenir cette dérivée normale, en s'appuyant sur les propriétés des fonctions analytiques. La formule qu'il démontre (*Acta Mathematica*, 40, 1914, p. 240) donne une intégrale portant sur la dérivée de la fonction arbitraire. La présente méthode part d'un point de vue très différent.

Proposons-nous d'abord de trouver la dérivée normale en un point M_0 du cercle C de rayon unité, de la fonction harmonique définie dans tout le plan par des valeurs $V(\omega)$ (ω étant l'arc M_0M de C compté dans le sens positif) sur C. En appelant $F(V)$ la valeur de cette fonction au point situé

([1]) γ l'arc de grand cercle M_0M, θ l'angle du plan de ce cercle avec un plan fixe passant par OM_0, $0 \leqq \sigma \leqq \pi$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$.

([2]) Dans la direction OM_0.

([3]) *Leçons sur quelques types simples, etc.* fasc. I de la *Collection des Cahiers scientifiques* de M. Julia, Paris, Gauthier-Villars, 1927, p. 200.

sur le rayon de M_0 à la distance $\rho < 1$ du centre, on a

$$(1)\quad F(V) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V\,d\omega + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\rho^n \int_0^{\pi} V\cos n\omega\,d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[V(\omega)+V(-\omega)]\,d\omega + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\rho^n\int_0^{\pi}[V(\omega)+V(-\omega)]\cos n\omega\,d\omega.$$

Si le crochet est nul, $F(V)$ est nulle. On en déduit

$$(2)\quad \frac{dF[V]}{d\rho} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\rho^{n-1}\int_0^{\pi}[V(\omega)+V(-\omega)]n\cos n\omega\,d\omega.$$

En posant $P_n = \cos n\omega$, on a la *formule de récurrence*

$$nP_n = \frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{2\sin\omega}(P_{n-1}-P_{n+1})\right].$$

Supposons, pour fixer les idées, que $V'(\omega)$ et $V''(\omega)$ existent, la première partout, la seconde dans un voisinage de $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, qu'elles soient bornées et que $V'(\omega)$ s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$. En intégrant par parties dans (2), on obtient

$$\frac{dF(v)}{d\rho} = \left(-1+\frac{1}{\rho^2}\right)F\left[\frac{V'(\omega)}{2\sin\omega}\right] - \frac{1}{\rho\pi}\int_0^{\pi}\frac{V'(\omega)-V'(-\omega)}{2\sin\omega}\cos\omega\,d\omega$$
$$-\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\int_0^{2\pi}\frac{V'(\omega)-V'(-\omega)}{2\sin\omega}\,d\omega.$$

Comme le crochet reste borné, on peut faire tendre ρ vers l'unité et l'on obtient, après une intégration par parties si $V(0)$ et $V(\pi)$ sont nuls,

$$\frac{dF_i(V)}{dn} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}[V(\omega)+V(-\omega)]\frac{d\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}.$$

Soit $U(\omega)$ une fonction donnée sur C et posons

$$v(\omega) = U(0) + \sin\omega\left[U'(0)\cos^2\frac{\omega}{2} - U'(\pi)\sin^2\frac{\omega}{2}\right].$$

La fonction $V(\omega) = U(\omega) - v(\omega)$ satisfait aux conditions requises. On trouve les dérivées normales

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dF_i(U)}{dn} &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\left[U(\omega)+U(-\omega)-2U(0)\right]\frac{d\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}},\\ \frac{dF_e(U)}{dn} &= -\frac{dF_i(U)}{dn};\end{aligned}\right.$$

En appelant θ et φ les angles polaires de M_0 et M, on a encore

$$(B') \quad \frac{dF_i[U(\theta)]}{dn} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[U(\varphi) - U(\theta) - U'(\theta)\sin(\varphi-\theta)]\frac{d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi-\theta}{2}}.$$

Pour passer au problème de Dirichlet relatif à un domaine D limité par une courbe Γ, il suffira de considérer la fonction qui fait la transformation conforme de D sur C. La dérivée normale s'exprimera alors, en prenant les précautions nécessaires, au moyen de cette fonction et d'une intégrale sur Γ.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une généralisation du potentiel.* Note de M. **Pierre Humbert**, présentée par M. Henri Villat.

Cherchant à généraliser les intégrales et les équations différentielles du potentiel newtonien, j'ai étudié il y a quelque temps l'intégrale

$$U(x, y, z) = \iint_S e^{\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{2}} d\sigma,$$

étendue à une surface *algébrique* S, où a, b, c sont les variables d'intégration, et j'ai montré (¹) que si l'équation de S est

$$\sum_{m,n,p} A_{m,n,p}\, a^m b^n c^p = 1,$$

la fonction U satisfait à l'équation différentielle suivante, où parenthèses et puissances ont un sens symbolique évident,

$$\sum_{m,n,p} A_{m,n,p}\left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)^m\left(y - \frac{\partial}{\partial y}\right)^n\left(z - \frac{\partial}{\partial z}\right)^p U = U.$$

Voici une nouvelle généralisation de ce résultat. Au lieu de la distance $x^2+y^2+z^2$, introduisons l'expression du troisième degré

$$x^3+y^3+z^3-3xyz,$$

et, au lieu de l'exponentielle, c'est-à-dire de la fonction hypergéométrique ${}_0F_0$, la fonction hypergéométrique biconfluente du second ordre ${}_0F_1(1, u)$, qui, comme on le sait, se confond, à l'argument près, avec la fonction de Bessel J_0.

(¹) *Sur le potentiel correspondant à une attraction proportionnelle à* $\rho e^{\frac{\rho^2}{2}}$ (*Mathematica*, Cluj, I, 1929, p. 117-121).

Nous considérerons alors l'intégrale

$$V(x, y, z) = \int\int {}_0F_1\left(1\,;\, \frac{(x-a)^3+(y-b)^3+(z-c)^3-3(x-a)(y-b)(z-c)}{9}\right)d\sigma$$

étendue à une surface S *algébrique*, dont l'équation sera encore

$$\sum_{m,n,p} A_{m,n,p}\, a^m b^n c^p = 1.$$

Nous serons alors conduits à la proposition que j'énonce ici, comptant en indiquer la démonstration et certaines conséquences dans un autre Recueil : l'intégrale V satisfait à l'équation aux dérivées partielles (symbolique) suivante :

$$\sum_{m,n,p} A_{m,n,p}\left(x - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\right)\left(y - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\right)\left(z - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\right)V = V$$

dont l'ordre est égal au double du degré de S.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques équations aux dérivées partielles*. Note de M. **Jacques Devisme**, présentée par M. Henri Villat.

1. Reprenons notre système ([1])

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \dfrac{\partial Z}{\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial Z}{\partial y}, \end{cases}$$

on en déduit aisément que X, Y, Z sont des intégrales du système

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} D_x U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} = 0, \\[2mm] D_y U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} = 0, \\[2mm] D_z U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = 0, \end{cases}$$

et *a fortiori* de l'équation de M. P. Humbert

$$(1)\qquad \Delta_3 U = \frac{\partial}{\partial x}(D_x U) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y U) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z U) = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - \frac{3\,\partial^3 U}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 0,$$

([1]) *Comptes rendus*, 193, 1931, p. 1154.

Si l'on remarque que $D_y U$, $D_z U$, $D_x U$ sont les composantes sur les axes Ox, Oy, Oz du tourbillon du vecteur ayant pour composantes sur les mêmes axes $\partial U/\partial z$, $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$ (¹), on en déduit des interprétations géométriques simples des conditions (II) et (1).

2. Les trois fonctions X, Y, Z vérifiant (I) peuvent être considérées comme constituant un système *conjugué*. On a déjà vu (même Note) qu'ils possèdent des propriétés généralisant celles des fonctions conjuguées dans la théorie des fonctions analytiques.

Plaçons-nous maintenant au point de vue de M. N. Cioranesco (²) et considérons la fonction

$$\Phi = \log[(X+\lambda)^3 + (Y+\mu)^3 + (Z+\nu)^3 - 3(X+\lambda)(Y+\mu)(Z+\nu)].$$

Si nous exprimons que lorsque X, Y, Z sont trois intégrales du système (II), il en est de même de la fonction Φ quelles que soient les constantes λ, μ, ν, on trouve que X, Y, Z vérifient le système (I) (ou l'un des cinq autres systèmes trouvés dans notre Note déjà citée).

Au contraire, si nous exprimons que lorsque X, Y, Z sont trois intégrales de l'équation de M. P. Humbert, il en est de même de la fonction Φ quelles que soient les constantes λ, μ, ν, on est amené à remplacer le système (I) par le système

$$\begin{aligned} D_x X &= D_y Y = D_z Z, \\ D_y X &= D_z Y = D_x Z, \\ D_z X &= D_x Y = D_y Z, \end{aligned}$$

où l'opérateur D_x est substitué à l'opérateur $\partial/\partial x$.

La même transformation appliquée à l'équation de M. P. Humbert fournit

$$D_{x^3}^3 U + D_{y^3}^3 U + D_{z^3}^3 U - 3 D_{xyz}^3 U = \Delta_3(\Delta_3 U) = \Delta_3^2 U.$$

On pourra aussi généraliser ces idées à nos équations $\Delta_{3,n} U = 0$ (³) en prenant

$$\Phi = \left[\sum_{j=1}^{n} (X_j + \lambda_j)\right]\left[\sum_{i,k} (X_i + \lambda_i - X_k - \lambda_k)\right].$$

3. Plus généralement on peut appeler *système conjugué* un système de fonctions telles que

$$\begin{aligned} X &= A(x, y, z) + j\,B(x, y, z) + j^2 C(x, y, z), \\ Y &= A(x, y, z) + j^2 B(x, y, z) + j\,C(x, y, z), \\ Z &= A(x, y, z) + B(x, y, z) + C(x, y, z), \end{aligned}$$

(¹) Bien remarquer les permutations circulaires.

(²) N. Cioranesco, *Sur les fonctions harmoniques conjuguées* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 56, 1932, p. 55).

(³) *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 517.

où A, B, C sont trois fonctions réelles de x, y, z; il est alors facile de généraliser une suite de théorèmes de Ch. Riquier ([1]).

4. Considérons l'équation aux dérivées partielles $\partial^r U/\partial u_1 \ldots \partial u_r = 0$ et effectuons le changement de variables défini par

$$u_i = \sum_j a_i^j x_j, \qquad \frac{\partial U}{\partial u_i} = \sum_i b_j^i \frac{\partial U}{\partial x_j}.$$

Pour que le polynome associé à l'équation aux dérivées partielles transformée soit justement à un facteur numérique près l'expression en $x_1, \ldots, x_r$ du produit $u_1 \ldots u_r$, il faut et il suffit que les coefficients a_i^j de la $i^{\text{ième}}$ ligne de la première transformation soient numériquement proportionnels aux éléments b_j^i ou b_j^k de la $i^{\text{ième}}$ ligne ou de la $k^{\text{ième}}$ ligne de la seconde transformation, c'est-à-dire qu'il y a correspondance ou échange entre les lignes des deux substitutions.

Pour le cas de M. P. Humbert, il y avait échange; au contraire, dans celui étudié par M. M. Ghermanesco ([2]), les lignes de même rang se correspondent. Ce qui fait que, si la plupart des résultats donnés par M. P. Humbert dans ses diverses Notes se généralisent, les démonstrations sont légèrement modifiées; par exemple les fonctions analogues à celles d'Appell que l'on serait amené à introduire ne rentrent pas dans le cadre de la définition générale donnée par ce dernier.

Nous reviendrons sur ce dernier paragraphe dans un prochain Mémoire.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les directions de Borel de certaines fonctions entières d'ordre infini.* Note de M. **G. Valiron**, présentée par M. Hadamard.

1. Comme dans une Note précédente ([3]), je considère une fonction entière

$$(1) \qquad f(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$$

([1]) Ch. Riquier, *Sur quelques problèmes relatifs à l'équation aux dérivées partielles* $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^{(n)} U = 0$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5, 1926, p. 327).

([2]) M. Ghermanesco, *Sur une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre* (*Communication du* 25 novembre 1931, *Société mathématique de France*, 59, 1931; *Comptes rendus*, p. 40).

([3]) *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 1305-1308.

et une série de Taylor associée

$$(2)\qquad F(z)=\sum_0^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n = b_n\theta(n),$$

les $\theta(n)$ étant des nombres positifs tels que la fonction sommatrice

$$\Phi(z)=\sum \frac{z^n}{\theta(n)}$$

soit une fonction entière et que le rayon de convergence de (2) soit égal à 1. Supposons que l'on ait

$$(3)\qquad \theta(n)=\int_0^{\infty} e^{-V(t)}\, t^n\, dt,$$

la fonction $V(t)$ étant croissante et $V(t):(\log t)^3$ restant supérieur à 1 à partir d'une valeur de t. Le rapport de $\theta(n)$ au maximum $\theta_1(n)$ de la quantité à intégrer dans (3) est de la forme $[1+o(1)]^n$. En effet, t_n étant le t pour lequel ce maximum est atteint, $\theta(n)$ est supérieur à $\theta_1(n)(1-1/t_n)^n$, et, d'autre part, l'intégrale prise de $e^{\varepsilon n}$ à l'infini tend vers zéro avec $1/n$. Si petit que soit le nombre positif ε,

$$\overset{+}{\log}|f(z)| : V[r(1+\varepsilon)]$$

reste borné lorsque r croît indéfiniment. Pour $|z|\leqq r<1$, on a

$$F(z)=\int_0^{\infty} e^{-V(t)} f(tz)\, dt,$$

$F(z)$ est donc holomorphe sur un rayon $\arg z=$ const. pourvu que, dans un angle l'admettant pour bissectrice,

$$\overline{\lim_{|z|=\infty}}\ \frac{\overset{+}{\log}|f(z)|}{V(\eta|z|)}<1,$$

si petit que soit le nombre positif η. On obtient ainsi cette proposition, où $M(r, f)$ désigne le maximum de $|f(z)|$ pour $|z|=r$:

I. $\theta(n)$ *jouissant des propriétés indiquées et étant à croissance suffisamment régulière,* $|f(z)|$ *est de l'ordre de* $M(r, f)$ *dans tout angle admettant pour bissectrice la direction d'un point singulier de* $F(z)$.

Pour l'ordre infini, on a ce corollaire :

II. *Si, en outre* $\Phi(z)$ *est d'ordre infini, toute direction joignant l'origine à une singularité de* $F(z)$ *est une direction de Borel d'espèce maximum pour* $f(z)$.

Il s'agit des singularités fournissant l'étoile d'holomorphie.

2. Si les $\theta(n)$ sont donnés positifs, même très réguliers, la détermination d'une fonction $V(t)$ vérifiant (3), qui revient à la résolution de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-V(t)} e^{tx}\, dt = \sum_0 \frac{\theta(n)}{n!} x^n,$$

ne semble pas fournir de résultats dans le cas général.

Mais si $f(z)$ est donnée, d'ordre positif, on peut déterminer des $\theta(n)$ vérifiant les conditions du n° 1. Désignons par $m(r)$ le terme maximum de $f(z)$. Prenons pour $V(t)$ le plus grand des deux nombres $\log m(t)$ et $U(t)$, $U(t)$ étant une fonction vérifiant les conditions

$$(4)\qquad \overline{\lim_{t=\infty}} \frac{U(t)}{\log m(t)} \leq 1, \qquad \lim_{t=\infty} \frac{U(t)}{(\log t)^2} > 1,$$

et considérons la fonction $\theta_1(n)$ correspondante, on aura $\theta_1(n) |b_n| \leq 1$, l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n. $\theta(n)$ étant définie par (3), la fonction $F(z)$ admettra bien le cercle $|z| < 1$ pour cercle de convergence. Par suite :

III. *Si une fonction entière $f(z)$ d'ordre positif, on associe la fonction* $F(z)$ *définie par* (2), (3), (4), *toute direction sur laquelle se trouve un point frontière de l'étoile d'holomorphie de $f(z)$ est une direction dans laquelle $f(z)$ est au moins de l'ordre $e^{U(r)}$.*

Cette proposition permet de retrouver et de compléter en ce qui concerne l'ordre et les directions de Borel les théorèmes découverts par M. Pólya en partant d'une suggestion de M. A. Bloch [1]. Les lacunes de $F(z)$ étant celles de $f(z)$, à tout théorème sur les singularités de $F(z)$ déduit de la considération des lacunes correspond un théorème sur l'ordre de $f(z)$, donc sur l'existence de directions de Borel d'espèce maximum. En particulier.

IV. *Si $f(z)$ est d'ordre infini et si la densité des indices n pour lesquels $b_n \neq 0$ est nulle, toute direction est direction de Borel d'espèce maximum de $f(z)$.*

---

[1] *Math. Zeits.*, 29, 1929, p. 549-640. Au sujet du théorème II_b de ce Mémoire, je signalerai que j'avais indiqué (*Bull. Sc. math.*, 44, 1920, p. 98) qu'une fonction entière d'ordre infini à coefficients positifs admet l'axe réel pour direction de Julia. J'avais indiqué à M. Pólya en 1929, à la suite de la lecture de ses résultats, que les directions de Julia qu'il obtient dans divers cas sont en réalité des directions de Borel.

De même, en partant du théorème de Fatou d'après lequel on peut toujours faire en sorte que la fonction obtenue en multipliant par -1 une infinité de coefficients convenablement choisis de $F(z)$ admette comme coupure la circonférence $|z|=1$, on complète d'une façon analogue le théorème III_b de M. Pólya.

MÉCANIQUE RATIONNELLE. — *Sur le roulement sans glissement d'un corps solide sur une surface déformable.* Note de M. **Constantin Woronetz**, présentée par M. Henri Villat.

On sait que le problème du roulement sans glissement d'un corps solide sur une surface rigide peut être réduit à l'intégration de cinq équations différentielles obtenues des propriétés cinématiques du mouvement (¹) et de trois équations-conséquences du théorème du moment des quantités de mouvement. Ces huit équations étant de premier ordre déterminent les cinq coordonnées indépendantes du corps, par exemple les coordonnées bien connues u, v, u_1, v_1, δ de Neumann, et les trois projections s, τ et n de la vitesse angulaire sur les axes du trièdre de Darboux lié au corps au point du contact.

En généralisant ce problème classique, j'étudie ici le cas où la base, cessant d'être parfaitement rigide, possède des propriétés élastiques et se déforme sous la pression du corps. Je suppose qu'une partie de cette surface déformée, se trouvant derrière le corps, ne se rétablit que très lentement et ne donne pas de réaction. Le roulement d'un corps sur du sable mouillé peut servir d'exemple à un tel mouvement. En complétant les équations du mouvement par des termes dus aux forces élastiques j'applique la méthode classique de M. Émile Picard pour obtenir les approximations successives des solutions du problème considéré.

Supposons que la réaction de chaque élément de base est proportionnelle à la surface de cet élément et à son déplacement; admettons que la déformation est proportionnelle à la réaction normale avec un coefficient de proportionnalité k très petit. En se contentant d'une approximation du deuxième ordre par rapport au nombre k, nous obtenons pour la résultante Φ des forces élastiques et pour son moment autour du point de contact les

---

(¹) P. Woronetz, *Ueber die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt* (*Math. An.*, 70, 1911, p. 447).

projections suivantes :

$$(1)\quad \Phi_u = \Phi_v = 0,\quad \Phi_n = \frac{\sigma\pi k^2\lambda^2}{\sqrt{\Delta\Delta'' - \Delta'^2}},\quad L_u = (s\Delta + \tau\Delta')\,R,\quad L_v = (s\Delta' + \tau\Delta'')\,R,$$

$$R = -\frac{16\sqrt{2k}}{15\pi}(s^2\Delta + 2s\tau\Delta' + \tau^2\Delta'')^{-\frac{1}{2}}\Phi_n\lambda^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta = \frac{D}{E} + \frac{D_1}{E_1}\sin^2\delta + \frac{D''_1}{G_1}\cos^2\delta,\qquad \Delta' = \left(\frac{D''_1}{G_1} - \frac{D_1}{E_1}\right)\sin\delta\cos\delta,$$

$$\Delta'' = \frac{D''}{G} + \frac{D''_1}{G_1}\sin^2\delta + \frac{D_1}{E_1}\cos^2\delta,$$

σ étant un coefficient constant ne dépendant que des propriétés élastiques de la base, λ le multiplicateur des liaisons et $E, \ldots, D''_1$ les coefficients des formes fondamentales de deux surfaces.

L'analyse des équations du mouvement, complétées par des termes (1) dépendant de la réaction, présente en général beaucoup de difficultés. On obtient des intégrales exactes de ces équations, par exemple, dans le problème de roulement d'une balle pesante sur une surface plane, ou d'une balle sur une autre; dans ce dernier cas les solutions s'expriment en fonctions elliptiques si les balles sont soumises à la force attractive de Newton.

Il est facile de voir que la méthode d'approximations successives de M. Émile Picard est applicable dans le cas général. En effet, les équations du problème peuvent être mises sous la forme

$$\frac{ds}{dt} = \varphi_1 + k^{\frac{5}{2}}(P_1 s + Q_1\tau)(s^2\Delta + 2s\tau\Delta' + \tau^2\Delta'')^{-\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{5}{2}},$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \varphi_2 + k^{\frac{5}{2}}(P_2 s + Q_2\tau)(s^2\Delta + 2s\tau\Delta' + \tau^2\Delta'')^{-\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{5}{2}},$$

$$\frac{dn}{dt} = \varphi_3 + k^{\frac{5}{2}}(P_3 s + Q_3\tau)(s^2\Delta + 2s\tau\Delta' + \tau^2\Delta'')^{-\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{5}{2}},$$

où φ_1, φ_2, φ_3 désignent des fonctions de deuxième ordre par rapport à s, τ et n dont les coefficients, ainsi que les fonctions P_i et Q_i $(i = 1, 2, 3)$, ne dépendent que des coordonnées du corps. Nous démontrons que la valeur approximative de λ, obtenue à l'aide du théorème de la quantité de mouvement, est égale à celle trouvée pour la surface rigide. Remarquons encore que les cinq équations exprimant des propriétés cinématiques sont aussi résolues par rapport aux dérivées du/dt, dv/dt, du_1/dt, dv_1/dt, $d\delta/dt$ et ne changent pas dans le cas d'une surface élastique. En excluant le cas où le point de contact de deux surfaces est un point singulier, on voit que pour un intervalle de temps assez petit les conditions de Cauchy et de Lipchitz sont satisfaites.

Suivant la méthode classique de Henri Poincaré, appliquée dans le cas de l'influence d'une force perturbatrice sur un système holonome (¹), nous posons comme première approximation $k = 0$ et obtenons ainsi les solutions qui correspondent au cas de la surface rigide. En substituant ces solutions dans les seconds membres des équations considérées, nous obtenons par simples quadratures des approximations du deuxième ordre. En continuant le calcul de la même manière, on obtient des solutions exactes du problème quand l'ordre d'approximation tend vers l'infini.

Nous avons essayé d'appliquer cette méthode dans quelques cas où l'intégration directe des équations ne peut être effectuée. Par exemple nous avons trouvé que, dans le cas de roulement d'un ellipsoïde de révolution pesant sur une surface plane élastique, le point de contact peut rester sur l'équateur ou sur un méridien, mais ne reste pas sur un parallèle. Sur le plan de roulement ce point décrit dans ce cas une développante de cercle. Certaines conditions relatives à la vitesse angulaire étant satisfaites, l'ellipsoïde aplati tend à se mettre sur son pôle; au contraire l'ellipsoïde allongé a tendance de rouler sur l'équateur.

ÉLASTICITÉ. — *Sur l'état élastique et plastique d'un corps indéfini à deux dimensions percé d'un trou circulaire.* Note de M. **Davin**, présentée par M. Jouguet.

Nous avons dans une précédente Note (²), dont nous reprenons les notations, donné une première approximation de la solution élastique et plastique du problème d'Alfons Léon. Nous en donnons ici une seconde : soit α la moitié de la mesure de chaque arc plastique. α est l'infiniment petit principal.

Nous avons vu que l'état du domaine plastique « restreint » est bien connu. L'état du domaine élastique se compose : 1° d'un état de tensions proportionnelles à celles relatives au problème élastique pur (d'Alfons Léon);

2° d'états de tensions dus à des tensions fictives normales et tangentielles $f(\varphi)$ et $g(\varphi)$ sur les arcs plastiques, tant que le dépassement est assez faible pour que le prolongement analytique de l'état élastique n'ait pas de singularités à l'intérieur du domaine plastique.

(¹) H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, I, p. 111.

(²) *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 522.

Soit $\rho = \rho(\theta)$ l'équation polaire de la courbe limite C_1. Les trois fonctions inconnues sont $f(\varphi)$, $g(\varphi)$, $\rho(\theta)$.

Les conditions qui les déterminent s'obtiennent en écrivant que N_ρ, N_T, T se raccordent dans les deux domaines sur la courbe limite C_1. On obtient trois équations fonctionnelles de la forme :

$$(1) \qquad \underset{\text{plastique}}{N_\rho[\rho(\theta)]} = \underset{\text{élastique}}{N_\rho[f(\varphi), g(\varphi), \rho(\theta)]}.$$

La méthode n'est applicable qu'à condition que le domaine plastique restreint constitue tout le domaine plastique, ce qu'on vérifie après coup.

La résolution du système fonctionnel [1] se simplifie quand le dépassement de la limite d'élasticité est infiniment petit. Nous avons vu dans la Note précitée qu'en admettant $f(\varphi) = g(\varphi) = 0$, $\rho(\theta) = r[1 + 0,1\,\varepsilon - 0,4\sin 2\theta]$ le raccordement des tensions élastiques et plastiques avait lieu avec une erreur du quatrième ordre sur N_ρ et N_T, du troisième ordre sur T. Si nous admettons

$$g(\varphi) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}\,T(\varphi) = \dfrac{8}{5}\sin 2\varphi[\sin^2\alpha - \sin^2\varphi] \text{ sur les arcs plastiques [2]}, \\ 0 \text{ extérieurement à ces arcs,} \end{cases}$$

l'erreur sur T extérieurement aux arcs plastiques tombe au quatrième ordre. Mais, par contre, des erreurs du troisième ordre s'introduisent entre N_T élastique et plastique mesurés sur la courbe limite trouvée en première approximation.

Nous allons supprimer ces erreurs en modifiant $f(\varphi)$ et $\rho(\theta)$ sans en introduire de nouvelles sur T ni N_ρ.

Sur le cercle $\rho = r$, tout état de tensions dû à des tensions données $g(\varphi)$ se décompose [3] en éléments de la forme

$$N_\rho = 0, \qquad N_T = -\pi\cos 2n\theta, \qquad T = \frac{\pi}{2}\sin 2n\theta.$$

N_T se déduit donc de $-2T$ dans un tel état de tensions par l'opération suivante : développer $-2T$ en série de Fourier, qui sera nécessairement une série de sinus pairs, changer les sinus en cosinus et sommer. En utili-

---

(1) *Loc. cit.*

(2) L'expression de $T(\varphi)$ est déduite de la solution d'Alfons Léon et de la connaissance de la courbe limite en première approximation, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre.

(3) *Comptes rendus*, 193, 1931, p. 1318.

sant les formules ci-dessous, conséquences immédiates de la notion de série divergente sommable,

$$\sum_{K=1}^{K=\infty} \frac{\sin K u}{K} = \frac{\pi}{2} - \frac{\overline{u}}{2} \qquad \text{avec } \overline{u} = u \pm 2p\pi,$$

$$\sum_{K=1}^{K=\infty} \frac{\cos K u}{K} = \mathrm{L} \sin \left| \frac{u}{2} \right| .$$

on trouve, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre

$$\mathrm{N_T} = -\frac{8}{5} \left\{ \frac{8\alpha^3}{3} - 2\theta \left[(\alpha^2 - \theta^2) \mathrm{L} \left| \frac{\theta + \alpha}{\theta - \alpha} \right| + 2\alpha\theta \right] \right\},$$

nous poserons le deuxième membre égal à $\Phi(\theta)$.

Au quatrième ordre près, les tensions sur la courbe limite sont, en affectant de l'indice 1 les valeurs des mêmes tensions telles qu'elles résultent de la première approximation étudiée dans notre précédente Note et en désignant par $\Delta\rho(\theta)$, $\Delta f(\varphi)$ les modifications apportées à $\rho(\theta)$, $f(\varphi)$ pour passer de la première approximation à la seconde et par $\Delta f(\theta)$ la valeur de $\Delta f(\varphi)$ lorsqu'on fait $\varphi = \theta$,

$$\mathrm{N}_\rho = \mathrm{N}_{\rho_1} + \Delta\rho(\theta) \frac{\partial \mathrm{N}_\rho}{\partial \rho} \text{ (plastique)},$$

$$\mathrm{N}_\rho = \mathrm{N}_{\rho_1} + \Delta\rho(\theta) \frac{\partial \mathrm{N}_\rho}{\partial \rho} + \frac{\pi}{2} \Delta f(\theta) \text{ (élastique)},$$

$$\mathrm{N_T} = \mathrm{N_{T_1}} + \Delta\rho(\theta) \frac{\partial \mathrm{N_T}}{\partial \rho} \text{ (plastique)},$$

$$\mathrm{N_T} = \mathrm{N_{T_1}} + \Phi(\theta) + \Delta\rho(\theta) \frac{\partial \mathrm{N_T}}{\partial \rho} + \frac{\pi}{2} \Delta f(\theta) \text{ (élastique)},$$

les équations fonctionnelles relatives à N_ρ, $\mathrm{N_T}$ se réduisent à

$$\Delta\rho(\theta) \left[\frac{\partial \mathrm{N}_\rho}{\partial \rho} \text{ plastique} - \frac{\partial \mathrm{N}_\rho}{\partial \rho} \text{ élastique} \right] = \frac{\pi}{2} \Delta f(\theta),$$

$$\Delta\rho(\theta) \left[\frac{\partial \mathrm{N_T}}{\partial \rho} \text{ plastique} - \frac{\partial \mathrm{N_T}}{\partial \rho} \text{ élastique} \right] = \frac{\pi}{2} \Delta f(\theta) + \Phi(\theta),$$

ce qui, en négligeant toutes les quantités du quatrième ordre au moins, conduit finalement au résultat

$$\Delta\rho(\theta) = -\frac{1}{5\pi} \Phi(\theta), \qquad \Delta f(\theta) = 0,$$

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Tracé des lignes de courant dans l'écoulement d'Oseen autour d'un cercle.* Note [1] de MM. **J. Pérès** et **L. Malavard**, présentée par M. Henri Villat.

1. Comme suite à notre Note précédente [2], nous indiquons ici la réalisation, au bassin électrique, du potentiel d'Oseen autour d'un cercle.

La difficulté est de remplir, au bord arrière, la condition $\partial\psi/\partial x = 0$. Après plusieurs essais, nous avons obtenu des résultats satisfaisants en remplaçant le bord arrière du cercle par une ligne c' normale aux lignes ψ à construire. Avant d'expliquer comment a été obtenue cette c', nous indiquerons comment on peut arriver rapidement, et sous une forme nouvelle, aux formules théoriques du cas en question.

2. Posant $f = \varphi + i\psi$, la vitesse complexe $\Omega = df/dz$ est fonction de z régulière à l'extérieur du cercle et doit avoir le seul zéro $z = 1$. Elle sera donc de forme

$$\Omega = -\mathrm{U}\left(1 - \frac{1}{z}\right)e^{s(z)} = -\mathrm{U}\left(1 - \frac{1}{z}\right)e^{\mathrm{A}_1\frac{1}{z} + \mathrm{A}_2\frac{1}{z^2} + \dots},$$

la série $s(z)$ étant convergente pour $|z| > 1$. On en déduit l'angle de la tangente à une ligne ψ avec $\mathrm{O}x$, soit

$$\alpha = -\arg\Omega = -\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\theta}{r - \cos\theta} + \mathrm{A}_1\frac{\sin\theta}{r} + \mathrm{A}_2\frac{\sin 2\theta}{r^2} + \dots$$

et, sur le cercle, il reste $(r = 1)$,

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} + \mathrm{A}_1\sin\theta + \mathrm{A}_2\sin 2\theta + \dots,$$

qui doit être égal à $\pi/2 + \theta$ au bord avant $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ et à π au bord arrière $(\pi/2 < \theta < 3\pi/2)$. Les coefficients A_i sont donc ceux de la série bien connue

$$\frac{2}{\pi}\left(\sin\theta - \frac{1}{3^2}\sin 3\theta + \frac{1}{5^2}\sin 5\theta - \dots\right),$$

de sorte que s est la transcendante

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{z}} \operatorname{arc\,tang} u \,\frac{du}{u},$$

---

(1) Séance du 25 avril 1932.

(2) *Comptes rendus*, 194, 1936, p. 1314-1316.

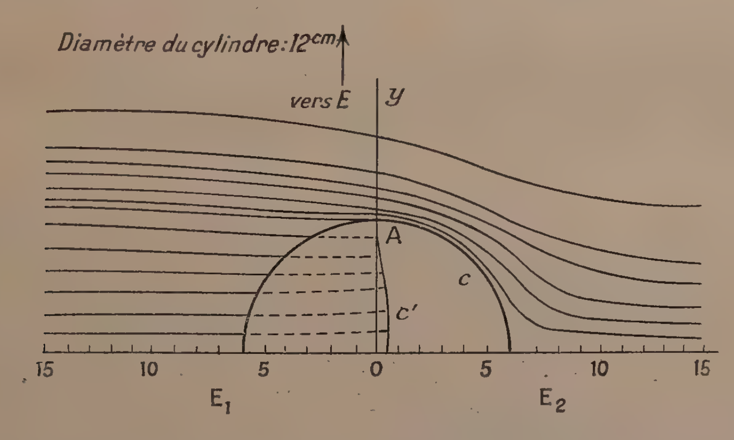
et que l'angle α est

$$\alpha = -\text{arc tang}\,\frac{\sin\theta}{r-\cos\theta} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r} - \frac{\sin 3\theta}{3^2 r^3} + \frac{\sin 5\theta}{5^2 r^5} - \ldots\right). \tag{1}$$

D'autre part $\Omega_1 = \Omega(1/z)$ est définie à l'intérieur du cercle et prend évidemment sur celui-ci des valeurs imaginaires conjuguées de Ω. En particulier sur l'arc arrière $(\pi/2 < \theta < 3\pi/2)\,\Omega$ étant réel, Ω et Ω_1 sont égales de sorte que Ω_1 donne le prolongement analytique de Ω à l'intérieur du cercle à travers l'arc arrière; l'angle α correspondant valant évidemment

$$\alpha = \text{arc tang}\,\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta} - \frac{2}{\pi}\left(r\sin\theta - \frac{r^3}{3^2}\sin 3\theta + \frac{r^5}{5^2}\sin 5\theta - \ldots\right). \tag{2}$$

3. Or on se rend compte aisément qu'une ligne $c'(\varphi = \text{const.})$ passant par le point A $(z = i)$ du cercle s'écarte peu du rayon OA. Pour construire cette ligne on prendra [formule (2)] les tangentes en quelques points du rayon OA. Ces droites sont sensiblement normales à c' qui peut alors être définie approximativement par des arcs de cercle coupant les droites précédentes à angle droit. L'obstacle limité à c (bord avant) et à c' a été



moulé en paraffine et disposé comme le montre la figure, l'électrode E_2 se prolongeant par une lame conductrice qui recouvre c. Dans ces conditions et pour une chute de potentiel (dont le réglage se trouve être plus aisé que pour la plaque) convenable entre E_1 et E_2, on doit avoir au bassin électrique les lignes de courant d'Oseen. C'est ce que l'expérience vérifie. La figure montre les lignes ψ obtenues au bassin et qui ont été vérifiées par le calcul de tangentes.

4. L'exemple précédent montre assez le caractère de la méthode d'analogies électriques : elle ne dispense point de l'étude mathématique de la

solution théorique, étude qui parait nécessaire dès qu'il s'agit d'un cas dont la réalisation électrique n'est pas immédiate; mais elle intervient pour suppléer avec avantage au calcul numérique d'ensemble.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Mouvements multiponctuels correspondant à l'équation de Jacobi écrite pour le cas d'un seul point.* Note [1] de M. A. **Buhl**.

L'équation de Jacobi, à fonction inconnue V, écrite pour le mouvement d'un point, lorsqu'on y fait, avec E énergie totale constante,

$$V = S - Et,$$

prend la forme indépendante du temps

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Z}\right)^2 = \Omega(X, Y, Z). \tag{1}$$

On sait aussi que l'équation (1) peut correspondre à une propagation de front d'onde [2]. Soit l'équation *homogénéisée*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2 = \Omega\left(\frac{X}{f}, \frac{Y}{f}, \frac{Z}{f}\right) \tag{2}$$

qui coïncide avec (1) sur des surfaces S, d'équation $f = 1$, quand f est homogène d'ordre 1. L'équation (2) donne beaucoup plus de précision à la propagation du front d'onde; elle permet de le diviser en fragments parcourant chacun un canal adéquat, transportant chacun une intégrale invariante, ces fragments pouvant ne pas conserver la continuité avec les fragments voisins d'où, tout aussi bien, propagation corpusculaire. De telles considérations ont déjà été signalées [3] mais, ici, elles sont reprises en partant du point de vue dynamique classique et en montrant que ce sont essentiellement des considérations d'homogénéité qui permettent les résultats venant d'être indiqués.

---

(1) Séance du 25 avril 1932.

(2) George Birtwistle, *La nouvelle mécanique des quanta* (trad. Ponte et Rocard), 1929, Chap. XVIII; Eugène Bloch, *L'ancienne et la nouvelle théorie des quanta*, 1930, Chap. XIV.

(3) *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 1006.

L'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$(3)\qquad \frac{X f_X + Y f_Y + Z f_Z}{\sqrt{f_X^2 + f_Y^2 + f_Z^2}} = \frac{f}{\sqrt{\Omega}}.$$

Si $A(X, Y, Z)$, $B(X, Y, Z)$ sont fonctions homogènes d'ordre zéro, (3) peut s'écrire, avec Ψ homogène d'ordre -3,

$$\frac{1}{\Theta\left(\frac{X}{f}, \frac{Y}{f}, \frac{Z}{f}\right)} \frac{1}{\sqrt{f_X^2 + f_Y^2 + f_Z^2}} \begin{vmatrix} f_X & f_Y & f_Z \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B^Z \end{vmatrix} = \frac{f\Psi}{\Theta\sqrt{\Omega}} = f^{-2}\Delta(A, B).$$

Multipliant par $\Lambda(A, B)\,\Theta\,dS$ et posant

$$(4)\qquad \Lambda(A, B) = \frac{\partial V}{\partial A} - \frac{\partial U}{\partial B} = \frac{1}{\Delta(A, B)},$$

on obtient, sur une cloison ou portion finie de surface S,

$$\iint_S \Theta\, dS = \iint_S \left(\frac{\partial V}{\partial A} - \frac{\partial U}{\partial B}\right) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix} dS = \int_\Sigma U\, dA + V\, dB.$$

C'est la formule de Stokes pour espaces à canaux. Les canaux ont une section quadrilatérale; sur leurs faces A, B, $A + dA$, $B + dB$ sont constants. L'intégrale double en $\Theta\, dS$ se propage d'une cloison S à toute autre qui est projection canale de S. Mais la formule ainsi reconstruite est indépendante, en elle-même, de considérations d'homogénéité; le point de vue dynamique apparaît, une fois de plus, comme moins général que le point de vue stokien ou électromagnétique.

Si l'on effectue la réduction pfaffienne

$$(5)\qquad U\, dA + V\, dB = M\, dN,$$

les trois membres de (4) peuvent être pris égaux à 1 et l'équation précédente, aux dérivées partielles de f, peut être réduite à

$$(6)\qquad \frac{1}{\Theta\sqrt{f_X^2 + f_Y^2 + f_Z^2}} \begin{vmatrix} f_X & f_Y & f_Z \\ M_X & M_Y & M_Z \\ N_X & N_Y & N_Z \end{vmatrix} = 1.$$

Jusqu'ici les canaux étaient coniques, c'est-à-dire rectilignes. Il en est bien de même en (6) puisque M et N sont fonctions de A et B, c'est-à-dire aussi homogènes d'ordre zéro.

Mais l'équation (6) ne change pas si, par exemple, on y remplace M et N par

$$M^* = M + \rho(f), \qquad N^* = N + \sigma(f).$$

Ainsi apparaissent de nouveaux canaux *non rectilignes* et même assez profondément indéterminés. Il y a *variation des canaux*. Il est établi qu'à l'équation de Jacobi (1), on peut associer des mouvements multiponctuels à trajectoires quelconques.

On observera aussi que la réduction (5) est identique à l'intégration de

$$U\,dA + V\,dB = 0.$$

Ainsi la Physique théorique, après avoir englobé l'équation de Jacobi, englobe l'ensemble des équations différentielles du premier ordre.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur l'entretien en oscillations du réseau passif le plus général.* Note [1] de M. **Ph. Le Corbeiller**, présentée par M. Ch. Fabry.

1. Considérons un réseau électrique à n mailles ne contenant aucune source d'énergie, les constantes satisfaisant par suite aux conditions suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} a. & \text{les } R,\ L_{kk},\ C_{kk}, \text{ sont positifs ou nuls;} \\ b. & L_{kl} = L_{lk}, \quad R_{kl} = R_{lk}, \quad C_{kl} = C_{lk}. \end{cases}$$

Désignons par le symbole D la dérivée d/dt, et posons

$$Z_{kl} = L_{kl}D + R_{kl} + \frac{1}{C_{kl}D}.$$

Les équations de Kirchhoff généralisées (équations de Lagrange) sont

$$(2) \qquad \begin{cases} Z_{11}i_1 + Z_{12}i_2 + \ldots + Z_{1n}i_n = e_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z_{n1}i_1 + Z_{n2}i_2 + \ldots + Z_{nn}i_n = e_n. \end{cases}$$

Supposons $e_2 = e_3 = \ldots = e_n = 0$; le système (2) fournit la relation

$$(3) \qquad i_1 = \frac{|Z_{22}\ldots Z_{nn}|}{|Z_{11}\ldots\ldots Z_{nn}|}e_1 = \mathcal{Y}_{11}(D)e_1 \quad \text{ou} \quad e_1 = \mathfrak{Z}_{11}(D)i_1.$$

Nous appellerons $\mathfrak{Z}_{11}(D)$ une *impédance généralisée* et l'opérateur

---

(1) Séance du 25 avril 1932.

inverse $\mathcal{Y}_{11}(D)$ une *admittance généralisée*. Le fait que les conditions (1) sont satisfaites entraîne pour les fonctions $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ de D des restrictions connues et d'ailleurs identiques.

Supposons maintenant $e_3 = e_4 = \ldots = e_n = 0$, le système (2) fournit les relations

$$(4) \qquad \begin{cases} i_1 = \mathcal{Y}_{11} e_1 + \mathcal{Y}_{12} e_2, \\ i_2 = \mathcal{Y}_{21} e_1 + \mathcal{Y}_{22} e_2, \end{cases}$$

équations connues du réseau passif linéaire le plus général pourvu de deux bornes d'entrée et de deux bornes de sortie, ou *quadripôle*.

2. Proposons-nous de former l'équation à laquelle satisfait le réseau passif linéaire le plus général, envisagé comme quadripôle, et entretenu en oscillations au moyen de l'énergie empruntée à une source d'énergie continue unique. On sait qu'il est impossible de faire varier un de ces coefficients L ou C sans mise en jeu d'énergie mécanique; le système envisagé, étant par hypothèse exclusivement électrique, devra donc contenir au moins un coefficient R variable. Supposons par exemple que la partie variable de la résistance modulée dépende, d'une manière continue, d'une tension d'entrée u appliquée à une résistance infinie et que l'on recueille ainsi à deux bornes de sortie un courant j et une tension v; on aura entre les quantités j, u, v une relation finie $-j = F(u, v)$, caractéristique de ce *relais unilatéral*.

Nous prendrons d'abord pour relation $-j = F(u, v)$ la suivante :

$$(5) \qquad -j = \frac{v + ku}{\rho} - \delta \frac{(v + ku)^3}{3},$$

où k, ρ, δ sont des constantes. C'est celle qui est vérifiée, à un degré assez élevé d'approximation, par les *lampes triodes* couramment employées par la technique.

3. Réunissons les bornes de sortie du relais aux bornes d'entrée d'un quadripôle passif; soient w la tension et zéro le courant aux bornes de sortie du quadripôle; nous aurons entre j, v et w les deux relations

$$(6) \qquad j = \mathcal{Y}_1 v,$$

$$(7) \qquad \mathcal{Y}_2 v = \mathcal{Y}_3 w,$$

où les $\mathcal{Y}$ sont des opérateurs du type *admittance généralisée*.

Enfin réunissons les bornes de sortie du quadripôle aux bornes d'entrée du relais (*réaction*). Nous aurons

$$(8) \qquad w = \pm u \quad \text{ou} \quad \varepsilon u.$$

Il résulte des relations (5), (6), (7), (8) que la quantité $e = v + ku$ (*tension composée* du relais) satisfait à l'équation

$$(9)\qquad \frac{-\mathcal{Y}_3}{\varepsilon k \mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_3}\mathcal{Y}_1 e - \frac{e}{\rho} + \delta\frac{e^3}{3} = 0.$$

4. Dans le cas le plus simple, le quadripôle se compose d'un circuit oscillant unique et l'équation (9) se ramène au type

$$(10)\qquad y'' - \varepsilon(1 - y^2)y' + y = 0,$$

étudié par M. van der Pol et depuis par d'autres auteurs.

Dans le cas général, l'équation (9) ou plus généralement l'équation

$$(11)\qquad \frac{-\mathcal{Y}_3}{\varepsilon k \mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_3}\mathcal{Y}_1 e + F(e) = 0$$

[que l'on obtiendrait en supposant que le relais a pour surface caractéristique statique un cylindre $-j = F(v + ku)$, de degré quelconque] correspond, les opérations représentées par les symboles $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$, $\mathcal{Y}_3$ (D) étant effectuées, à une *équation différentielle non-linéaire d'ordre* $2n$, si le quadripôle passif est à n mailles. Cette équation, d'ailleurs, ne contient pas explicitement la variable t, ce qui est caractéristique d'un système isolé.

Toutefois, en raison des restrictions (1), les opérateurs $\mathcal{Y}$ sont de nature particulière et par suite une équation du type (11) n'est qu'un cas extrêmement particulier de l'équation générale du même ordre. Or l'origine physique de cette équation donne à penser que ses solutions jouissent sans doute de propriétés asymptotiques relativement simples. La technique radioélectrique utilise couramment les oscillations stables, périodiques et quasi-périodiques, fournies par des systèmes du type que nous avons décrit (ou par les systèmes équivalents qui leur correspondent par dualité); aussi l'équation générale (11) qui les régit a-t-elle paru devoir être signalée.

ÉLECTRONIQUE. — *Sulfures phosphorescents : intervention des chocs de seconde espèce.* Note de M. **Maurice Curie**, présentée par M. Jean Perrin.

J. Perrin et F. Perrin ont montré l'importance des transferts d'énergie (de molécule à molécule ou de molécule à électron libre) dans la fluorescence des substances organiques en solution. La considération de

transferts d'énergie peut fournir une explication simple à certains phénomènes présentés par les sulfures phosphorescents.

1. *Phosphorescence de longue durée.* — Lenard (1) a montré qu'il existe dans le spectre d'excitation violet et ultraviolet des sulfures phosphorescents des bandes correspondant à une phosphorescence de longue durée (bandes *d*, dauerproszess). Pour Lenard et ses collaborateurs, ces bandes d'absorption sont dues à des centres moléculaires complexes, renfermant un ou plusieurs atomes de l'impureté luminogène. Lenard envisage même une longueur d'onde absolue d'excitation qui serait caractéristique du centre luminogène. Cette manière de voir rencontre de graves objections (2).

Comme l'a montré Walter (3), la position des bandes *d* paraît surtout dépendre du milieu; ceci résulte aussi des travaux même de Lenard et de Schmidt.

Ces bandes *d* sont bien probablement dues à une absorption par les molécules du diluant proches d'un centre luminogène. Celui-ci pouvant égèrement influencer l'absorption des molécules du diluant voisines.

On peut rendre compte de l'établissement d'une phosphorescence de longue durée en envisageant un mécanisme par chocs de seconde espèce :

Lors de l'absorption *d*, les molécules du diluant sont amenées dans un état excité. Il y a alors choc de seconde espèce sur un électron antérieurement détaché d'un centre luminogène et plus ou moins libre. Ceci produit un accroissement de l'énergie cinétique de cet électron, accroissement qui lui permet de se soustraire au rappel du centre positif luminogène et de pénétrer dans des champs de force étrangers à ce centre. D'où une plus longue durée de phosphorescence.

2. *Effet photo-électrique.* — Lenard et son collaborateur Göggel attribuent l'effet photo-électrique des sulfures phosphorescents à une action directe sur les centres luminogènes.

A mon avis, cet effet direct se produit surtout dans l'ultraviolet assez

---

(1) Se reporter à Lénard-Schmidt-Tomaschek, *Handbuch der Experimental Physik*, *Phosphorescenz und Fluorescenz*, 1.

(2) Maurice Curie, *Thèse*, *Paris*, 1923, p. 42-46 ; Guntz, *Thèse*, *Paris*, 1925, p. 60-63 ; Pringsheim, *Fluorescenz und Phosphorescenz*, p. 282-289. Je signale à nouveau ici que cette notion de longueur d'onde absolue d'excitation, telle que l'établit Lénard, n'est pas normale. La longueur d'onde n'est pas à envisager, mais la fréquence.

(3) Walter, *Physik. Zeitschrift*, 1912, p. 611.

lointain; je crois qu'il y a en plus un effet photo-électrique sur les électrons antérieurement détachés des centres luminogènes et fixés dans le proche diluant. Naturellement, cet effet photo-électrique pourra s'obtenir pour des quanta moins grands que l'effet direct.

Si l'on s'en tient aux faits principaux[1], cette hypothèse explique l'apparition d'un effet photo-électrique aux grandes longueurs d'onde (jusqu'à 700^{μ}) sur un sulfure phosphorescent excité, et aussi le fait que l'effet photo-électrique global avec un arc au mercure est plus grand sur un sulfure phosphorescent excité que sur le même produit non excité (Göthel, *Annalen der Physik*, 1931, p. 865).

D'autre part, Göggel a montré que si l'on étudie la répartition de l'effet photo-électrique en fonction de la longueur d'onde, on trouve des maxima voisins des maxima *d* d'excitation de la phosphorescence de longue durée; Göggel interprète ceci comme une action directe sur les centres luminogènes *d*.

Pour moi, ces maxima d'effet photo-électrique sont dus au mécanisme de chocs de seconde espèce exposé ci-dessus. Le choc de seconde espèce favorise l'effet photo-électrique, comme il favorise l'établissement d'une phosphorescence de longue durée.

RADIOACTIVITÉ. — *Sur le degré d'homogénéité des rayons γ filtrés de* ThC″ *et la vérification de la formule de Klein-Nishina.* Note [2] de **M. D. Skobelzyn.**

En 1928, Klein et Nishina [3] ont trouvé la solution du problème de diffusion par effet Compton, pour les rayons γ de hautes fréquences, en se basant sur la dynamique relativiste de Dirac. La comparaison de eette théorie avec l'expérience est d'importance primordiale, mais elle est compliquée par le fait que les sources monochromatiques de rayons γ ne sont généralement pas disponibles. Pour vérifier la formule en question, les longueurs d'onde effectives des rayons plus ou moins complexes employés dans les mesures d'absorption doivent être connues. La méthode spectro-

---

[1] Je ne retiens pas ici au même titre le fait cité par Göggel qu'un CaSBiN/10, très persistant, a donné un effet photo-électrique très faible. Je compte d'ailleurs reprendre des expériences à ce sujet, mes premiers essais ne confirmant pas ce point.

[2] Séance du 25 avril 1932.

[3] O. Klein et Y. Nishina, *Z. f. Phys.*, 52, 1928, p. 853.

scopique élaborée par l'auteur présente actuellement la seule voie efficace pour obtenir les valeurs moyennes des longueurs d'onde en question.

L'utilisation des rayons γ de ThC″ présente des avantages essentiels à cause de la simplicité relative du spectre émis dans ce cas. Le problème a été attaqué récemment par plusieurs auteurs, cette série de travaux ayant révélé des faits nouveaux de grande importance [1].

Or il existe un désaccord entre les suppositions admises par ces auteurs sur la composition spectrale des rayons utilisés et les résultats signalés dans ma Note précédente. D'après les données des articles cités (notamment de Meitner et Hupfeld), la radiation explorée est (après la filtration à travers 40^{mm} de plomb) parfaitement monochromatique, la raie intense de 2650 kilov. étant la seule présente dans le spectre. Les observatione directes réalisées dans des conditions presque identiques [2] en utilisant la méthode de la chambre Wilson ont révélé, par contre, (après filtration par 30^{mm} de plomb) une contribution de composantes plus molles de 37 pour 100 du nombre de quanta appartenant à la raie principale. Pour un filtre de 40^{mm} de plomb, on doit s'attendre, par conséquent, à la présence de 30 pour 100 de ces rayons plus mous.

Il est à remarquer que la méthode d'analyse des courbes d'absorption est certainement très peu sensible et peu efficace pour révéler l'existence des composantes signalées ci-dessus. Meitner et Hupfeld ont poursuivi l'absorption dans les divers absorbants atteignant de grandes épaisseurs (20^{cm} d'aluminium, par exemple). Les diagrammes logarithmiques obtenus par ces auteurs ne présentant aucune courbure, ils conclurent à l'homogénéité parfaite du rayonnement étudié. Or, en partant de la distribution présentée dans ma Note, la courbe d'absorption peut être trouvée par le calcul; on constate alors que la déviation de la loi exponentielle est trop insignifiante pour être révélée dans les conditions envisagées [3].

---

(1) G. T. P. Tarrant, *Proc. Roy. Soc.*, **128**, 1930, p. 345; C. Y. Chao, *Proc. Nat. Acad.*, **16**, 1930, p. 431; *Phys. Rev.*, **36**, 1930, p. 1519; L. Meitner et H. Hupfeld, *Z. f. Phys.*, **67**, 1931, p. 147; J. C. Jacobsen, *Z. f. Phys.*, **70**, 1931, p. 145.

(2) En ce qui concerne le système de canalisation. Relativement à la contamination éventuelle par Ms Th_2, voir la Note précédente (*Comptes rendus*, **194**, 1932, p. 1486).

(3) L'étude de l'effet de filtration entre 1, $4\text{-}5^{cm}$ de plomb serait plus effective. Il y a, à cet égard, des divergences entre les différents auteurs, mes résultats s'accordant avec ceux de Chao (*loc. cit.*). Il est à remarquer que le coefficient d'absorption dans le plomb varie très lentement dans la région $h\nu$-1850-2700 kilowolts, la différence des valeurs relatives à ces limites étant de 13 pour 100 seulement, selon Meitner et Hupfeld.

En admettant l'homogénéité rigoureuse du faisceau étudié, on a conclu à la validité exacte de la formule de Klein-Nishina (la précision des mesures étant de 2 pour 100). La correction qui résulte des faits exposés ci-dessus n'est pas grande et n'affecte que le degré de précision de la constatation citée, ce qui peut avoir, pourtant, une certaine importance de principe.

Les données signalées dans ma Note suffisent pour établir la longueur d'onde effective, selon la formule

$$\bar{\sigma}_T = \frac{\Sigma N \lambda \nu \sigma_A \sigma_T}{\Sigma N \lambda \nu \sigma_A} \quad (^1).$$

En tant que le pouvoir ionisant est indépendant de la vitesse des particules β, il n'y a pas à distinguer entre la méthode de comptage et la méthode d'ionisation. Ce n'est plus rigoureusement le cas dans les conditions envisagées, à cause de l'intervention des électrons lents produits par effet Compton. La formule écrite semble pourtant également acceptable pour les mesures effectuées à l'aide d'un compteur, à condition qu'il s'agisse de rayons très durs ([2]).

On est conduit aux valeurs suivantes :

Épaisseur du filtre de plomb.	Coefficient de diffusion « totale » pour l'aluminium σ_T.	Longueur d'onde effective λ.
30^mm	0,105	5,3 X. U.
40^mm	0,103	5,1 »

tandis qu'à la raie principale correspondrait $\sigma_T = 0,098$; $\lambda = 4,7$ X. U.

Il est peu probable que l'erreur sur la valeur de σ (dans le cas de 30^mm de plomb, surtout) dépasse l'unité dans la troisième décimale ([3]), les résultats signalés étant indépendants du pouvoir séparateur et relativement peu sensibles à l'influence des erreurs statistiques.

La valeur obtenue pour l'aluminium coïncide avec le résultat des mesures de Meitner et Hupfeld. Mais dans le cas des éléments plus légers (C, O) dont les coefficients étaient trouvés en accord exact avec la valeur théorique

---

([1]) E. Rutherford, *Radiat. f. Rad. Subs.*, 1930, p. 475; Skobeltzyn, *Z. f. Phys.*, 58, 1929, p. 600.

([2]) Le facteur $h\gamma\sigma_A$ fait que les différents quanta (plus durs) sont comptés proportionnellement à la portée des électrons secondaires.

([3]) Le contraire voudrait dire qu'il y a une erreur fondamentale dans la loi théorique admise comme base de ces calculs (loi de l'effet Compton), éventualité qui semble exclue.

calculée pour $\lambda = 4.7$, une divergence de l'ordre de 5 pour 100 est maintenant à constater. L'éventualité des écarts à partir de la formule théorique, dans les limites de cette précision, doit, par conséquent, être prise en considération.

RADIOACTIVITÉ. — *Dosage de l'actinium dans les minerais d'urane*. Note de Mlle **Ellen Gleditsch** et M. **Ernst Foyn**, présentée par M. G. Urbain.

Depuis quelque temps nous essayons de déterminer la quantité d'actinium qui se trouve dans les minerais d'urane. Plus spécialement nous avons cherché si le rapport Ac/U est constant ou s'il varie avec l'âge du minerai, ce qui pourrait nous donner, on le sait, des indications précieuses sur l'origine de la famille de l'actinium.

Des recherches antérieures ont été faites par Boltwood (1), Hahn, Meitner (2), Wildish (3) et d'autres, le principe étant toujours de doser les substances ou de comparer les quantités des différentes substances par leur rayonnement α. Le désaccord dans les résultats prouve que le problème comporte des difficultés sérieuses; celles-ci sont d'ordre chimique, la purification des corps en question étant extrêmement délicate.

Nous avons attaqué le problème par deux voies différentes :

1° Dosage de l'actinium lui-même; précipitation de l'actinium et purification de celui-ci, suivie d'une étude de l'augmentation de son activité;

2° Dosage du protactinium; précipitation et purification du protactinium et détermination de son activité α.

1. *Précipitation de l'actinium*. — Le minerai est dissous dans l'acide nitrique et dans la solution, les terres rares sont précipitées par l'acide fluorhydrique. Pour bien entraîner l'actinium, on ajoute une petite quantité de nitrate de lanthane. Les opérations sont répétées deux fois. Les terres rares, après avoir été transformées en sulfates, sont dissoutes dans l'eau et l'on précipite le thorium avec l'ionium par le peroxyde d'hydrogène en solution presque neutre. Dans la solution, l'actinium est précipité par l'ammoniaque. La principale cause d'erreur proviendrait du radium

(1) B. B. Boltwood, *Amer. Journal Sci.*, 25, 1908, p. 269.

(2) O. Hahn et L. Meitner, *Phys. Zeitschr.*, 20, 1919, p. 529; *Ber. Deutsch. Chem. Gesells*, 52, 1919, p. 1812.

(3) James E. Wildish, *J. Amer. Chem. Soc.*, 52, 1930, p. 163.

entraîné. Nous nous sommes débarrassés du radium, en partie avant la séparation de l'actinium du thorium + ionium, en partie après, toujours par la méthode de précipitation de ces substances par l'ammoniaque, ce qui laisse le radium en solution. Il est nécessaire de répéter l'opération cinq à six fois.

2. *Précipitation du protactinium.* — Le minerai est traité par l'acide nitrique. Le résidu, additionné de 10 à 20^{mg} d'oxyde de tantale, est mis en fusion avec de la soude. La masse est dissoute dans l'eau et la solution est ajoutée à la solution principale. On a soin d'avoir une solution presque neutre, très légèrement acide. On y ajoute de l'acide sulfurique et l'on porte à l'ébullition, l'oxyde de tantale est précipité avec le protactinium. Ensuite fusion au bisulfate et reprise par l'eau bouillante; l'oxyde de tantale ainsi précipité est soluble dans l'acide fluorhydrique très étendu. On précipite par l'ammoniaque, puis on dissout dans l'acide fluorhydrique et en répétant ces opérations on arrive à séparer le radium et à obtenir un oxyde de tantale pur.

Des précipités obtenus par les opérations décrites, on a préparé à l'aide de chloroforme des couches très minces : 0,03 à 0^{mg},1 de substance par centimètre carré. Les activités étaient mesurées dans un électromètre de Wulfl à fils de quartz. L'instrument fonctionne très régulièrement et a un mouvement propre très faible. Toutes les mesures sont comparées à un étalon d'oxyde d'uranium.

La comparaison des mesures permet de calculer le rapport de la quantité d'actinium à celle d'uranium. Vu les difficultés des purifications chimiques, nous ne comptons pas atteindre dans ces premiers essais une précision supérieure à 10 pour 100.

Les résultats indiquent que la quantité de la branche de l'actinium représente 3 pour 100 de celle de l'uranium.

Les minerais examinés sont : la *broeggerite*, une thoruraninite cristallisée de Raade (Norvège) qui nous donne 2,7, et une *pechblende de Cornouailles*, une uraninite non cristallisée qui nous donne 3,3.

Nous poursuivons l'étude pour d'autres minerais.

ÉLECTROCHIMIE. — *Sur les borures alcalins*. Note de MM. L. ANDRIEUX et D. BARBETTI, présentée par M. Georges Urbain.

Les borures alcalins étant encore inconnus, nous nous sommes demandé, à la suite des travaux antérieurs publiés par l'un de nous [1], s'il ne serait pas possible de mettre leur formation en évidence en préparant des borures mixtes d'un métal alcalin et d'un autre métal, c'est-à-dire en stabilisant en quelque sorte le borure alcalin par l'autre borure.

En électrolysant des bains fondus, constitués par des borates et des fluorures de sodium, de potassium ou de lithium additionnés de petites quantités d'un oxyde alcalino-terreux ou de terres rares, nous avons pu obtenir un certain nombre de ces borures mixtes.

Les expériences ont été faites, comme dans les travaux précédemment cités, à des températures voisines de 950°; nous avons isolé des cristaux noirs présentant, au microscope, le même aspect que les borures des métaux alcalino-terreux ou des terres rares.

Voici, à titre d'exemple, les résultats fournis par les analyses de quelques-uns de ces produits :

		Analyse des cristaux.					
		Métaux.		Bore.			
Nos des essais.	Composition du bain.	M %.	Na %.	Total %.	B correspt à M.	B' correspt à Na.	Na/B'.
1...	{ Borax : 130g / Na F : 30 } + Ca O : 4g	Ca : 23,6	10,0	65,6	38,2	27,4	0,36
2...	» + Ca O : 12	31,9	4,1	63,5	51,7	11,8	0,35
3...	» + Sr O : 5	Sr : 44,4	5,7	49,0	32,9	16,1	0,35
4...	» + Sr O : 10	46,1	4,9	48,1	34,2	13,9	0,35
5...	» + Ba O : 50	Ba : 56,1	4,5	38,9	26,5	12,4	0,36
6...	» + Ba O : 60	57,3	3,8	37,7	27,1	10,6	0,36
7...	» + Ce O^2 : 3	Ce : 45,6	8,9	45,1	21,1	24,1	0,36
8...	» + Ce O^2 : 5	50,5	6,7	41,8	23,4	18,4	0,36
9...	» + Ce O^2 : 20	58,3	3,7	37,6	27,0	10,6	0,35
10...	» + La^2O^3 : 15	La : 50,3	6,9	42,4	23,5	18,9	0,36
11...	» + Nd^2O^3 : 10	Nd : 48,8	7,7	43,2	21,9	21,3	0,36
12...	» + Nd^2O^3 : 12	52,1	6,4	41,2	23,4	17,8	0,35
13...	» + Th O^2 : 4	Th : 41,9	12,1	46,3	11,7	34,6	0,35
14...	» + Th O^2 : 7	43,9	11,6	45,0	12,3	32,7	0,35
15...	» + Th O^2 : 15	49,4	9,7	40,3	13,8	26,5	0,36

(1) L. ANDRIEUX, *Annales de Chimie*, 12, 1929, p. 423-507; *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 720.

Si l'on retranche de la masse du bore total la quantité B nécessaire à la formation du borure du métal alcalino-terreux ou du métal du groupe des terres rares, il est remarquable que le rapport de la masse du sodium à la masse B′ du bore restant est un nombre constant, voisin de 0,35, c'est-à-dire qu'il est sensiblement égal au rapport des masses de sodium et de bore contenues dans un borure de sodium de formule NaB^6 (Na 26,15 pour 100, B 73,84 pour 100).

Les borures alcalins auraient donc des formules analogues à celles des borures des métaux alcalino-terreux et des métaux des terres rares, et pourraient syncristalliser avec eux en proportions variables, pour donner des borures mixtes.

Comme dans le cas des borures mixtes de cérium et de thorium, nous avons constaté que la composition du produit dépend, dans certaine, limites, des proportions des constituants du bain. C'est ainsi que la teneurs en borure alcalino-terreux, du borure mixte obtenu, décroît au fur et à mesure que la quantité d'oxyde correspondant diminue dans le bain. Mais, lorsque cette quantité devient trop faible, les cristaux ne se forment plus; on recueille du bore impur. Les derniers cristaux obtenus sont constitués par un borure mixte ayant une teneur limite en borure alcalin, teneur au delà de laquelle, pour une température donnée, le borure mixte n'est plus stable. Ainsi, pour les borures mixtes de sodium et de thorium, cette teneur limite est d'environ 50 pour 100 dans les conditions où nous avons opéré.

En résumé, les recherches précédentes nous amènent à penser que les métaux alcalins sont susceptibles, dans certaines conditions, de donner des borures : NaB^6, KB^6, LiB^6, isomorphes des borures des métaux alcalino-terreux et des métaux des terres rares. Sans être encore parvenus à les isoler, nous avons pu, grâce à la formation de borures mixtes, déterminer leurs formules probables.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur le spectre Raman de quelques carbures cyclaniques.* Note [1] de MM. **Étienne Canals**, **Marcel Godchot** et Mlle **Germaine Cauquil**, présentée par M. Delépine.

La présente Note a pour but de faire connaître les spectres Raman de quelques carbures appartenant aux cycles en C^5, C^7, C^8, et les observations

---

[1] Séance du 25 avril 1932.

qui en résultent en les comparant entre eux et avec ceux déjà cités par nous pour les carbures cyclohexaniques dans une précédente Communication [1].

Le tableau ci-après résume l'ensemble de nos déterminations; nous avons ajouté à celles-ci les spectres Raman du cyclopropane et du méthylcyclopropane publiés récemment par MM. Lespieau, Bourguel et Wakemann [2].

Raies Raman (en cm^{-1}).

1*.	2*.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
–	–	–	–	379	392	335	320	243	–
–	–	301	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	523	425	444	397	381	371	–
867	–	889	845	801	775	729	722	700	703
–	–	–	890	–	845	–	–	–	–
–	–	–	–	–	896	–	–	–	–
–	–	1032	–	1029	1038	1005	1000	988	996
–	–	1205	1205	1165	1191	1165	1177	1171	1159
1188	1208	1290	1299	1268	1260	1282	1278	1293	1286
–	–	1370	1374	1346	1363	1345	1351	1367	1347
1439	–	1450	1458	1440	1447	1439	1444	1439	1452
3011	–	2873	2873	2854	2853	2858	2855	2857	2864
3028	–	2942	2942	2926	2925	2903	2922	2914	2904
3078	–	2973	2974	2933	2952	2933	2945	2939	épaisse, 2927 à 2954

* D'après Lespieau, Bourguel-Wakeman.

1, Cyclopropane; 2, Méthylcyclopropane; 3, Cyclopentane; 4, Méthylcyclopentane; 5, Cyclohexane; 6, Méthylcyclohexane; 7, Cycloheptane; 8, Méthylcycloheptane; 9, Cyclooctane; 10, Méthylcyclooctane.

L'examen de ce tableau conduit aux conclusions suivantes :

A. Le spectre Raman du cyclopentane trouvé par nous est en parfait accord avec celui publié récemment par Weiler [3].

B. Les spectres Raman des différents carbures fondamentaux présentent un aspect général très voisin.

Les fréquences dans la région spectrale des raies relatives aux liaisons C — C diminuent lorsque le nombre d'atomes de carbone du cycle croît.

(1) *Comptes rendus*, **194**, 1932, p. 176.

(2) *Comptes rendus*, **193**, 1931, p. 1087.

(3) Weiler, *Zeits. für Physik*, **69**, 1931, p. 586.

La raie 1440 caractérisant le groupement —CH^2, ainsi que d'autres auteurs l'ont déjà montré, se retrouve à peu près invariable pour tous ces carbures.

Dans la région des liaisons C—H, rien de particulier à signaler lorsqu'on examine les raies comprises entre 2845 et 3078 cm^{-1}.

C. La substitution dans le noyau d'un —CH^3 produit en général un abaissement de fréquence en particulier pour la raie (forte) de la région 800, cette diminution étant d'autant plus élevée que le cycle a moins d'atomes de carbone, à tel point que le méthylcyclooctane semble avoir sensiblement le même spectre Raman que le cyclooctane.

D. Il nous a paru intéressant de comparer les spectres indiqués dans le tableau précédent avec ceux déjà signalés par d'autres auteurs [(1), (2), (3), (4)] pour les carbures acycliques normaux saturés de même condensation en carbone.

1.	2.	3.	4.	5.
–	–	320	154	–
–	402	360	765	–
–	764	–	–	–
–	843	823	822	828
870	867	897	897	879
940	–	–	956	955
1050	–	1040	1027	1066
–	–	1148	–	1143
–	–	–	–	–
–	–	1313	–	–
1450	1454	1455	1448	1448
2870	2857	2731	2865	2870
2910	2873	2862	2932	2934
–	2915	2941	–	–
–	2936	–	–	–
2950	2962	–	–	–

1, Propane (1); 2, Pentane (2); 3, Hexane (3); 4, Heptane (4); 5, Octane (4).

Nous constatons tout de suite que les raies fortes de la région 1200 : (1188, 1290, 1268, 1293) existent uniquement dans les spectres Raman des carbures cyclaniques et n'existent pas dans les spectres Raman des carbures

(1) Daure, *Annales de Phys.*, 12, 1929, p. 375.

(2) Dadieu-Kohlrausch, *Wien. Ber.*, 138, 1929, p. 41.

(3) Petrikalm-Hochberg, *Zeits. für phys. Chem.*, 3, 1929, p. 217 et 405.

(4) Ganesan-Venkateswaran, *Indian J. of Phys.*, 4, 1929, p. 196.

acycliques correspondants. Il semble donc que ces raies caractérisent un carbure à chaîne fermée. Il convient de noter encore que ces raies ont sensiblement la même fréquence, celle du cyclopropane exceptée.

E. Peut-on en outre tirer de ces résultats une règle permettant après examen d'un spectre Raman, de reconnaître si un carbure cyclanique appartient à un cycle plutôt qu'à un autre? Sans vouloir en affirmer aujourd'hui la possibilité (étant donné le nombre trop restreint de déterminations actuellement faites) nous pouvons indiquer toutefois que, si on considère la fréquence de la raie forte de la région 800 pour le cyclopentane, le cyclohexane, le cycloheptane et le cyclooctane, on trouve que le produit du carré de la fréquence par le nombre d'atomes de carbone du cycle reste constant à 6 pour 100 près ($f^2 \times n \times 10^{-3} = 38,5$).

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur le dosage du baryum à l'état de chromate.* Note de MM. **Lemarchands** et **Sirot**, présentée par M. Henry Le Chatelier.

L'emploi des chromates alcalins permet de séparer quantitativement le baryum et le strontium [1]. Pour préciser les conditions de cette méthode d'analyse nous avons étudié la solubilité du chromate de baryum dans l'eau distillée à 100°, puis dans les solutions étendues et bouillantes de chlorure de potassium.

1. *Solubilité du chromate de baryum dans l'eau distillée à* 100°. — Les mesures de solubilité du chromate de baryum dans l'eau à 100°, ont été faites dans des ballons en pyrex de un litre de capacité. Le col, très court de 4^{cm} de diamètre et rodé à l'émeri, venait s'ajuster dans un bouchon, également en pyrex. Celui-ci, creux, était soudé à un tube de 50^{cm} environ de longueur, qui servait de réfrigérant. Pour que la condensation de la vapeur émise par la solution portée à l'ébullition dans le ballon fut aussi complète que possible, ce tube était prolongé par un réfrigérant ascendant.

Une quantité voisine de 2 à 4^{dg} de chromate de baryum pesée à $0^g,0002$ près, était introduite dans le ballon à expérience avec une quantité d'eau bidistillée voisine de 300^g. La durée de l'ébullition variait de 7 à 8 heures. La solution était alors filtrée à l'aide de la trompe sur creuset en verre d'Iéna. La durée de la filtration ne dépassait pas deux minutes, pendant lesquelles le liquide était maintenu à l'ébullition. Après refroidissement, le

(1) Treadwell et Boll, *Analyse quantitative*, 2e édition, p. 82.

chromate de baryum non dissous était rassemblé sur le creuset au moyen d'une solution saturée à froid du même sel. Le creuset était ensuite séché, calciné au four électrique, afin d'éviter l'action des gaz réducteurs sur le chromate, et pesé dans les mêmes conditions après refroidissement dans un dessiccateur à anhydride phosphorique. D'autre part la solution chaude, filtrée, était également pesée, évaporée dans une capsule de platine à l'étuve électrique, puis le résidu calciné et pesé. On pouvait contrôler ainsi l'exactitude de la première détermination.

Au cours de trois expériences nous avons obtenu les nombres suivants, exprimant la solubilité du chromate de baryum en milligrammes par litre, à 100° :

11,71 11,93 11,8 (moyenne : 11,81).

Remarque. — La concentration du chromate de baryum à 100°, pour 1000^g d'eau, exprimée en millimolécules-grammes est

$$CrO_4Ba = \frac{11,8}{253,5} = 0,0465.$$

2. *Solubilité du chromate de baryum dans les solutions de chlorure de potassium.* — Nous nous somme servis du même appareil que pour les déterminations précédentes.

Quelques décigrammes de chromate de baryum étaient introduits dans le ballon au contact de solutions de chlorure de potassium de concentrations variables.

Après une ébullition de 7 à 8 heures, la solution bouillante était filtrée comme précédemment sur un creuset de verre.

Dans le tableau suivant des résultats, les concentrations sont exprimées en millimolécules grammes dans 1000 grammes de solution.

L'application de la loi d'action de masse sous la forme que Guldberg et Waage lui ont donné

$$K = \frac{C.CrO^4K^2 . C.BaCl^2}{C.CrO^4Ba . C^2.KCl}$$

conduit pour k aux valeurs données dans le tableau.

Expérience n°	2 - 4	5 - 9	11 - 12	14 - 17
$C.K^2CrO^4 = C.BaCl^2$	0,0865-0,08415	0,1290-0,1282	0,1531-0,1471	0,1836-0,1952
C.KCl	333 -333	478,5 -475,6	573,1 -572,0	730,6 -732,8
10^6 Kc	1,45 -1,37	1,56 -1,56	1,53 -1,42	1,36 -1,53

Expérience n°	19 - 20	23 - 26	28 - 29
$C.K^2CrO^4 = C.BaCl^2$	0,21006-0,20861	0,2299-0,2281	0,2705-0,2697
C.KCl	870,4 -870,4	995,2 -998,4	1271,7-1280,0
10^6 Kc	1,25 -1,24	1,15 -1,12	0,973-0,955

Pour chaque concentration en KCl, quatre ou cinq expériences ont été faites; la valeur de K est donnée pour les deux expériences se rapprochant le plus du résultat moyen. La constance de ce nombre montre que la loi s'applique bien dans le cas des solutions les plus diluées.

Le calcul du coefficient d'activité γ du chlorure de la valeur moyenne de $K = 1,24.10^{-6}$ donne les valeurs suivantes :

C.KCl...........	0	333	478	572	730,6	870	996	1275
γ.KCl...........	1	1,08	1,17	1,11	1,04	1	0,960	0,873

qui marquent une différence assez peu sensible dans la manière de se conduire du sel jusqu'aux concentrations supérieures à la normale.

Avec les résultats ci-dessus, on peut construire un abaque permettant de trouver les quantités de baryum dissoutes dans une solution de KCl de concentration déterminée.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur un procédé de préparation des chlorures anhydres des métaux des terres cériques.* Note de MM. **P. Brauman** et **S. Takvorian**, présentée par M. G. Urbain.

Une solution neutre ou légèrement acide (1) d'un sel d'un métal de la série cérique, traitée par un excès de benzoate de sodium, donne naissance à un précipité de benzoate hydraté de formule $M(C^6H^5CO^2)^3.3H^2O$ (2); la précipitation peut être considérée comme complète. Si on porte ce sel à 110° pendant 2 à 3 heures, la totalité de l'eau de cristallisation est éliminée sans qu'on observe aucune décomposition du benzoate, comme en témoignent les résultats suivants, relatifs à la calcination des benzoates anhydres.

	Oxyde M^2O^3 pour 100	
Élément.	calculé.	trouvé.
La........................	32,47	32,24-32,47
Nd........................	33,21	33,36-33,0
Sm........................	33,96	34,19-33,98

(1) Nous avons employé des solutions de nitrates ou de chlorures légèrement acides, afin d'éviter la formation de petites quantités de benzoates basiques.

(2) Czudnowicz, *J. Prakt. Chem.*, 80, 1860, p. 31; 82, 1861, p. 277.

Il est possible d'utiliser ces sels pour la préparation, à basse température, de chlorures anhydres.

Le benzoate est mis dans un entonnoir filtrant cylindrique en verre d'Iéna, que l'on introduit dans un soxhlet, où l'on verse de l'éther anhydre fraîchement saturé de HCl sec ([1]). L'appareil étant mis en relations avec l'atmosphère par l'intermédiaire d'un tube desséchant, on procède à l'extraction; l'acide chlorhydrique déplace l'acide benzoïque, qui se dissout dans l'éther, et que l'on élimine complètement en renouvelant le liquide à deux reprises.

L'extraction terminée, on sort rapidement le filtre dans lequel on fait passer HCl sec à la température de 60°, afin de chasser l'éther. Puis on déplace HCl par de l'air sec.

On obtient ainsi une masse poreuse qui se dissout dans l'eau avec le sifflement caractéristique des chlorures anhydres. Même chauffés préalablement à 350°, ces produits donnaient des solutions limpides; toute trace d'eau pouvant provoquer, dans ces conditions, la formation d'oxychlorures insolubles, avait bien été évitée.

C'est ce que confirment aussi les résultats d'analyses suivants :

	Métal °/₀		Cl °/₀		Nombre d'atomes de Cl pour
Élément.	trouvé.	calculé.	trouvé.	calculé.	1 atome de métal.
La	56,07	56,64	43,0	43,36	3,01
Nd	–	–	–	–	3,00
Sm	58,15	58,57	41,65	41,43	3,04

Les terres rares étaient dosées à l'état d'oxydes après deux précipitations à l'ammoniaque et passage par les oxalates; le chlore, dans le filtrat, à l'état de chlorure d'argent.

Le procédé décrit ci-dessus a l'avantage, tout en étant assez rapide, d'être pratiquement quantitatif; il permet d'opérer sans perte sur de faibles quantités d'un produit rare. De plus, bien que la température ne dépasse jamais 60°, il donne des produits parfaitement anhydres et cependant absolument exempts d'oxychlorures, ce qui n'est pas toujours le cas, du moins pour les derniers termes de la série, avec les méthodes habituellement employées.

([1]) On peut ajouter à la première portion d'éther 5 pour 100 de chlorure d'acétyle. Mais les chlorures ainsi obtenus se colorent légèrement quand on les chauffe à 350°. Les analyses données plus loin ont été effectuées avec des chlorures préparés sans chlorure d'acétyle.

CHIMIE GÉNÉRALE. — *Sur quelques réactions entre zéolithes et sels peu solubles dans l'eau.* Note de M. G. **Austerweil**, présentée par M. Delépine.

Dans une Note précédente [1], l'auteur a établi les relations quantitatives qui régissent l'échange des bases entre une solution saline et les zéolithes, glauconie et autres alumino-hydrosilicates. Il a été démontré que la loi qui régit ce phénomène est celle de Berthelot et Jungfleisch pour l'extraction d'un corps dissous dans un liquide, à l'aide d'un solvant non miscible à ce liquide.

L'échange des bases se fait donc de telle sorte que la zéolithe fonctionnant comme solvant non miscible à la solution aqueuse d'un sel, extrait de cette solution aqueuse le cation selon la loi de Berthelot et Jungfleisch, tout en laissant à sa place son propre cation. Il etait évident que, de ce fait, un gros excès de l'un des solvants (dans notre cas la zéolithe) pouvait extraire quantitativement, à partir de la solution aqueuse, le cation qui s'y trouvait et, inversement, un gros excès de la solution aqueuse pouvait extraire, quantitativement, de la zéolithe, le cation que cette zéolithe contenait sous forme de base mobile.

Les relations quantitatives régissant ce phénomène sont déterminées par un coefficient d'échange caractéristique pour chaque paire de cations et pour chaque silico-aluminate hydraté. Le phénomène ainsi caractérisé d'une façon précise permet de prévoir la façon dont on peut éliminer quantativement un cation se trouvant dans une solution aqueuse. Il faut, tout simplement, prévoir l'excès suffisant de l'échangeur de bases.

Récemment, l'auteur a réussi une extension de ce phénomène aux anions. Il a pu faire la constatation qu'en employant des échangeurs de basse appropriés, on réussissait non seulement à enlever un cation, à partir d'une solution, mais aussi l'anion correspondant et, par suite, une molécule entière. Pour ce faire, il suffit d'employer comme extracteur une quantité suffisante et calculable d'une zéolithe saturée d'un cation mobile pouvant former avec l'anion de la solution des sels insolubles; lorsqu'on traitera une telle solution avec cette zéolithe, le cation de la solution changera de place avec le cation de la zéolithe; mais comme ce cation ne pourra pas former de solution avec l'anion de la solution aqueuse, il se formera un précipité

---

[1] G. Austerweil, *Comptes rendus*, 193, 1931, p. 1013.

du cation qui était fixé préalablement sur la zéolithe et l'anion de la solution, tandis que le cation de la solution ira se fixer sur l'échangeur de bases.

Par exemple, si l'on sature de plomb une zéolithe de sorte que tout le cation mobile de la zéolithe soit constitué uniquement par du plomb, et si l'on en prend la quantité déterminée d'après la méthode décrite dans la Note précédente de l'auteur pour un échange du cation plomb avec des cations Na, on peut éliminer quantitativement à partir d'une solution de chromate de sodium par exemple, et l'anion chromique et le cation sodium, en la filtrant sur cette zéolithe plombée. Il en sera de même pour la quantité équimoléculaire de carbonate de sodium ou de potassium ; on obtiendra, dans tous ces cas, un précipité de chromate de plomb ou de carbonate de plomb dans les interstices de l'échangeur de bases et on pourra soutirer une solution exempte de tous sels, tandis que la zéolithe aura gardé l'ion sodium ou potassium des solutions.

Mais nous avons vu que tout phénomène d'échange des bases est réversible. Si l'on essaie de voir à quel résultat conduira l'application de la réversibilité de cette réaction lorsqu'on a à faire à la formation d'un précipité avec de la zéolithe et non pas à la formation d'une solution, on arrive à la constatation qu'il doit être possible de préparer des solutions salines en traitant des zéolithes avec des suspensions aqueuses de corps peu solubles dans l'eau. Effectivement, si on prend une zéolithe intégralement sodée et qu'on la mélange, dans les proportions calculées selon la formule établie précédemment, avec du sulfate de calcium hydraté (gypse pulvérisé) en tenant compte dans ce calcul du coefficient d'échange Na/Ca, on obtiendra, par simple lixivation avec de l'eau, une quantité presque théorique de sulfate de sodium. Nous aurons, dans ce cas, extrait à l'aide de la zéolithe, le cation qui se trouvait dans une matière très peu soluble dans l'eau.

Le phénomène se passe exactement comme lorsqu'on extrait à l'aide d'un solvant organique volatile une matière grasse se trouvant dans une masse solide, par exemple un tourteau de pressurage, et la zéolithe joue le rôle de solvant volatil; elle ne peut, effectivement le remplir qu'en présence d'eau et dans le seul cas où la solubilité dans l'eau de la matière dont on extrait le cation est plus grande que la solubilité de la zéolithe qui doit se former. Ainsi il n'y a aucune difficulté à préparer du sulfate de sodium avec de la zéolithe sodée et du gypse en suspension aqueuse, car la solubilité de ce gypse est de 2^g environ par litre d'eau et la solubilité de la zéolithe chaulée qui se forme est certainement inférieure, mais il sera impossible d'extraire du carbonate de sodium à partir de la craie pulvérisée,

avec de la zéolithe sodée et de l'eau, car la solubilité du carbonate de calcium est inférieure à la solubilité de la zéolithe chaulée. Par contre il est facile d'extraire avec de l'eau et de la zéolithe sodée de la soude caustique à partir de chaux hydratée et ce jusqu'à une certaine concentration limite à laquelle l'hydrate de calcium devient moins soluble dans la soude formée que la zéolithe chaulée. C'est le cas lorsque la concentration du NaOH atteint N/6. On est aussi limité en ce qui concerne la préparation du sulfate de soude à partir du gypse, par une concentration limite en Na^2SO^4 et ce pour les mêmes causes.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Action de l'hydrate de magnésie sur l'oxydation de l'hydroquinone*. Note de M. **Albert Saint-Maxen**, présentée par M. H. Le Chatelier.

Nous avons antérieurement montré (¹) que l'oxydation des solutions aqueuses d'hydroquinone est favorisée par les hydroxydes alcalins et alcalino-terreux. Nous nous proposons maintenant de voir dans quelle mesure cette propriété des bases alcalines peut s'étendre à l'hydrate de magnésie.

Tandis qu'une solution aqueuse saturée d'hydrate de magnésie, de concentration $3,5.10^{-4}$ mol-gr par litre, ne provoque aucune réaction appréciable, une suspension de ce corps, fraîchement préparée par action d'un alcali caustique sur une solution de sulfate de magnésium, se comporte comme une solution de soude de concentration équivalente.

Nous avons introduit 5^{cm^3} d'une suspension de magnésie hydratée de concentration décinormale, dans 300^{cm^3} d'une solution aqueuse d'hydroquinone contenant 20^g de diphénol par litre. Utilisant la méthode pneumatique préconisée par André Job (²), nous avons constaté une absorption d'oxygène, à la vitesse de $2^{cm^3},4$ par minute. L'introduction de 5^{cm^3} de soude décinormale dans une solution d'hydroquinone identique, détermine une absorption d'oxygène de $2^{cm^3},7$ par minute.

Cette suspension ne conserve pas plus de 10 minutes sa propriété excitatrice. Au bout de ce temps, l'introduction du même volume de suspension ne provoque plus qu'une absorption d'oxygène négligeable. En particulier on accroît la durée de ce pouvoir en augmentant la stabilité de la suspension. Au sein d'une solution visqueuse contenant 50 pour 100 en

(¹) Albert Saint-Maxen, *Comptes rendus*, **191**, 1930, p. 212.
(²) André Job, *Comptes rendus*, **142**, 1906, p. 1403.

poids de glycérine, la vitesse d'absorption demeure comprise entre 2,4 et 2^{cm^3},5 d'oxygène par minute avec une suspension préparée depuis 24 heures. Ces propriétés excitatrices ne disparaissent qu'au bout de plusieurs jours.

Si l'on hâte par la chaleur la précipitation de la suspension, le pouvoir excitateur disparaît comme dans le cas d'une suspension aqueuse. La glycérine seule ou additionnée de sulfate de magnésium n'accuse aucune action.

Malgré les difficultés expérimentales résultant de la faible solubilité de cet hydrate de magnésie, nous avons réussi, comme avec la soude, à mettre en évidence par des mesures de conductibilité électrique l'existence d'une combinaison équimoléculaire hydroquinone-hydrate de magnésie. D'autre part, le mélange des deux solutions incolores d'hydroquinone et d'hydrate de magnésie détermine l'apparition d'une coloration spectroscopiquement identique à celle que nous avons observée avec la soude.

D'autres modalités expérimentales permettent de faire intervenir la magnésie hydratée comme excitateur d'oxydation. Dès 1907, André Job [1] avait montré le parti que l'on pouvait tirer de l'acétate de nickel, ayant subi un traitement thermique convenable, pour favoriser l'oxydation des solutions aqueuses de diphénols.

L'acétate de magnésium se comporte de la même façon. Pulvérisé, humecté, puis chauffé en atmosphère d'azote à la température moyenne de 110°, ce sel perd progressivement son eau et une partie de son acide acétique. Le produit ainsi obtenu consiste en une poudre blanche, se dissolvant d'autant plus lentement dans l'eau que l'hydrolyse a été plus poussée. La liqueur résultante joue le rôle d'excitateur vis-à-vis des solutions d'hydroquinone, comme les suspensions dont nous avons parlé plus haut. Son évolution est caractérisée par la mesure de sa vicosité exécutée en même temps que celle de la vitesse d'oxydation provoquée.

Un échantillon d'acétate neutre de magnésie fut chauffé pendant une demi-heure à 110°. Ce traitement détermine une hydrolyse telle que la composition du produit obtenu correspond à 0,800 molécule-gramme d'acide acétique, par demi-molécule-gramme de magnésie.

Nous avons figuré, dans une première colonne, le temps mesuré à partir du moment de l'introduction du produit dans l'eau; dans une seconde colonne, l'aspect de la liqueur; dans une troisième colonne, la viscosité par rapport à l'eau; enfin dans une quatrième colonne, la vitesse d'absorption en centimètres cubes d'oxygène par minute. La solution excitatrice contient 100^{g} de produit par litre.

---

(1) André Job, *Comptes rendus*, 144, 1907, p. 1044.

Temps.	Aspect.	Viscosité.	Vitesse d'oxydation.
15 minutes..........	trouble	1,1	négligeable
3 heures............	homogène, opalescent	5,6	4,0
24 heures...........	id.	5,2	5,4
4 jours.............	trouble, formation de précipité	3,5	2,5
14 jours............	précipitation complète	1,3	1,0

Au cours de cette évolution, le pH de la solution excitatrice demeure compris entre 8,40 et 8,33, valeurs très voisines de celles relatives à une solution d'acétate neutre.

Pour tous les échantillons d'acétate de magnésie hydrolysé, on observe une évolution identique; le pouvoir excitateur passe par un maximum lorsque la liqueur présente une opalescence homogène.

Cet optimum varie avec le degré d'hydrolyse. Définissant ce dernier par le rapport entre la magnésie libérée au cours du traitement thermique et la magnésie totale contenue dans l'échantillon, la variation envisagée lui est sensiblement proportionnelle. Comme dans le cas des suspensions de magnésie envisagé au début de cette Note, la vitesse d'oxydation de la solution d'hydroquinone est la même que celle provoquée par une quantité de soude équivalente à celle de la magnésie libre.

Notons enfin que la nature du sel soumis à l'hydrolyse n'intervient pas dans la valeur de l'action excitatrice. C'est ainsi que, pour la même hydrolyse, le formiate de magnésie conduit à des résultats identiques à ceux de l'acétate.

Ainsi la façon de se comporter de l'hydrate de magnésie vis-à-vis de l'hydroquinone présente de nombreuses analogies avec celui des hydroxydes alcalins et celui des hydroxydes alcalino-terreux. Il est, par contre, complètement dlfferent de celui de l'hydroxyde de zinc dont l'action excitatrice est toujours nulle.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Action des acides étendus sur la phényliminoquinone-diazide*. Note de MM. **André Kling** et **René Schmutz**, présentée par M. Matignon.

A l'occasion d'une étude d'ordre technique, nous avons été amenés à reprendre les travaux qui ont été publiés et qui sont relatifs aux sels diazoïques issus de la diazotation de la *p*-aminodiphénylamine, ainsi que ceux touchant la phényliminoquinone-diazide, combinaison résultant de l'action

des bases alcalines, en solution aqueuse, sur les diazoïques précités. Au cours de notre travail, nous avons constaté que, contrairement à ce qui avait été annoncé (1), la phényliminoquinone-diazide, traitée par les acides étendus, se salifie en régénérant les sels de diazoïques primitifs et qu'en particulier, le sulfate issu de la phényliminoquinone-diazide :

$$C^6H^5.N = C^6H^4 = N^2, \qquad H^2SO^4,$$

s'identifie avec le sulfate de *p*-phénylaminobenzène-diazonium :

$$C^6H^5.NH.C^6H^4 - \underset{\underset{\displaystyle N}{|||}}{N}.SO^4H,$$

obtenu directement et que Hantzsch désigne sous le vocable de sulfate d'anilidobenzène-diazonium.

La phényliminoquinone-diazide de Hantzsch a été obtenue en faisant agir 100^{cm^3} d'ammoniaque à 22° Bé sur 10^g de sulfate de phénylaminobenzène-diazonium imparfaitement dissous dans 200^{cm^3} d'eau mélangés à 150^g de glace. Après une heure d'agitation mécanique, on filtre et lave à l'eau glacée le précipité impur de phényliminoquinone-diazide ainsi obtenu. Dans les eaux de filtration, on retrouve la presque totalité (98 pour 100) de l'acide sulfurique primitivement combiné au diazoïque, ce qui exclut toute éventualité d'un enrobage protecteur superficiel des particules de sulfate de diazoïque, enrobage qui serait constitué par des produits de décomposition.

La quinone-diazide, traitée par 300^{cm^3} d'acide sulfurique à 20 pour 100, refroidis à zéro, se transforme peu à peu, par agitation énergique, en fines aiguilles verdâtres. Celles-ci sont redissoutes dans 400^{cm^3} d'eau, la solution est ensuite filtrée pour éliminer un produit noir de décomposition, et reprécipitée par 200^{cm^3} d'acide sulfurique à 50 pour 100. Après essorage et lavage à l'acétone jusqu'à disparition totale de l'acide sulfurique, on isole $7^g,2$ de sulfate de phényliminoquinone-diazide, fines aiguilles jaunes, identique au sulfate de *p*-phénylaminobenzène-diazonium mis en œuvre. Le même rendement de 72 pour 100 est obtenu en remplaçant l'ammoniaque par 40^{cm^3} de soude caustique à 36° Bé.

L'identité du produit initial et du produit final a été établie : 1° par l'identité d'aspect cristallin ; 2° par l'analyse spectrale au moyen du photocolorimètre T. C. B., à cellule potassium-tungstène (absorption totale du

---

(1) Hantzsch, *Ber. d. chem. Ges.*, 35, 1902, p. 896.

violet et du bleu, faible absorption du vert, transmission intégrale du jaune, de l'orangé et du rouge); 3° par dosage de l'acide sulfurique combiné (33,36 pour 100 dans un cas, 32,51 pour 100 dans l'autre; théorie 33,40 pour 100); 4° par transformation au moyen de KI, de chacun des sulfates en iodures peu solubles (I pour 100 39,16 dans un cas, 38,70 pour 100 dans l'autre; théorie 39,38 pour 100); ces deux iodures présentant les mêmes spectres d'absorption que les sulfates; 5° par l'identité des réactions colorées et des spectres d'absorption, en milieu acétonique ammoniacal, des produits de copulation de chacun des sulfates avec la *m*-crésylènediamine (absorption totale du violet et du bleu, transmission partielle (35 pour 100) du vert, transmission intégrale du jaune, de l'orangé et du rouge); 6° par l'identité des chloromercurates, poudres bronzées à reflets métalliques.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Contribution à l'étude des dibenzylidène-cyclopentanones*. Note de MM. **R. Cornubert** et **M. De Demo**, présentée par M. Delépine.

L'un de nous a isolé, par distillation de la dibenzylidène-cyclopentanone I de teinte jaune citron et fondant à 190°, un isomère de teinte bistre clair fondant à 129° (1), dont l'hydrogénation a engendré un liquide qui a conduit à la même combinaison tétrahydropyronique que la dibenzylcyclopentanone II provenant de l'hydrogénation de l'isomère F : 190° (2). Ce corps F : 129° paraissait donc être lui-même une dibenzylidène-cyclopentanone. Néanmoins, n'ayant pu opérer que sur une petite quantité de matière, nous avons tenu à vérifier ce résultat et à essayer d'établir s'il existe encore d'autres dibenzylidène-cyclopentanones, afin d'y apporter une contribution à l'étude de l'isomérie éthylénique :

```
          CH²——CH²                              CH²——CH²
           |    |                                |    |
C⁶H⁵—CH=C      C=CH—C⁶H⁵               C⁷H⁷—CH      CH—C⁷H⁷
          \    /                                 \    /
            CO                                     CO
            I.                                     II.
```

La distillation de la dibenzylidène-cyclopentanone F : 190° donnant l'isomère F : 129° avec des rendements variables et toujours très faibles,

---

(1) R. Cornubert, *Comptes rendus*, 190, 1930, p. 440.
(2) R. Cornubert et A. Maurel, *Bull. Soc. chim.*, 4e série, 51, 1932, p. 50.

nous avons essayé tout d'abord de l'obtenir directement par condensation de la cyclopentanone et de l'aldéhyde benzoïque en cherchant des conditions expérimentales propices. Nous avons eu recours à un grand nombre d'agents de condensation en opérant en milieu hydroalcoolique, les uns créant un milieu acide, les autres un milieu alcalin : acide chlorhydrique, acide acétique, cyanure de potassium, borate de sodium, sulfure de sodium, pipéridine, triméthylamine, triéthylamine, éthylate de sodium, carbonate de sodium, hydrate de tétraméthylammonium, soude, potasse. Les uns n'ont été mis en œuvre qu'à une concentration, d'autres à diverses concentrations; de plus, la soude a été utilisée à diverses températures.

Nous dirons par ailleurs avec tous détails ce que chaque agent de condensation nous a donné; nous indiquerons simplement ici que les agents acides ne nous ont fourni que la dibenzylidène-cyclopentanone F : 190°, tandis que les agents alcalins suivant leur nature et les conditions d'utilisation ont engendré soit un dialdol F : 158°, soit un dialdol F : 178°, soit la précédente dibenzylidène-cyclopentanone F : 190°. N'ayant pu isoler ainsi l'isomère F : 129°, nous avons cherché à l'atteindre par d'autres voies : 1° par déshydratation des aldols par l'anhydride acétique, ce qui ne nous a donné que l'isomère F : 190°; 2° par distillation des dialdols à la pression atmosphérique, ce qui a fourni une petite quantité d'isomère F : 190° à côté principalement de benzaldéhyde et de cyclopentanone; 3° en condensant par divers alcoolates : méthylate, éthylate, propylate, isobutylate, amylate, ce qni a encore donné l'isomère F : 190°; de plus, l'isomère F : 129° étant produit à haute température, nous avons essayé de condenser par une petite quantité de cétylate à 250° en tube scellé, mais nous n'avons eneore obtenu que l'isomère F : 190°.

Nous sommes alors revenus au procédé de distillation de la dibenzylidène-cyclopentanone F : 190°, et en avons traité une grande quantité par ractions de 10^g. D'une opération à l'autre, nous avons encore observé des différences notables de rendement en produits de bas point de fusion. Par recristallisation dans l'alcool nous avons isolé, et ceci dans l'ordre suivant de solubilité croissante : 1° l'isomère F : 190° en proportion plus ou moins grande; 2° une certaine quantité de dibenzylidéne-cyclopentanone F : 131° (et non 129° comme il avait été indiqué précédemment), produit bistre clair d'apparence amorphe; 3° une très faible quantité d'un corps fondant à 140° se présentant en lamelles argentées très brillantes, de composition centésimale correspondant encore à celle d'une dibenzylidène-cyclopentanone; 4° une petite quantité de dibenzylidène-cyclopentanone

F : 190°; 5° des résines dont, avec l'alcool, nous avons extrait diverses substances plus ou moins jaunâtres; leurs points de fusion se sont étagés de 115 à 240° mais n'ont pu être stabilisés, par suite de manque de matière.

L'isomère F : 190° a conduit au dérivé tétrabromé F : 176° déjà décrit; l'isomère F : 131° en a fourni un peu, mais surtout un autre tétrabromure F : 80-85°.

L'hydrogénation catalytique de l'isomère F : 190° par des nickels formiques a donné deux dibenzylcyclopentanones F : 39-40° et 58°; celle de l'isomère F : 131° a engendré les mêmes corps; celle enfin de l'isomère F : 140° a conduit à un liquide dans lequel l'$\alpha\alpha'$-dibenzylcyclopentanone a pu être caractérisée (par sa combinaison tétrahydropyronique) à coté de deux corps blancs F : 129° et 220-240° que nous avons également obtenus, à l'exclusion alors des corps F : 39-40° et 58°, en hydrogénant l'isomère F : 190° par certains nickels formiques. Tous ces hydrodérivés sont actuellement à l'étude; c'est la première fois, après tant de nickels formiques utilisés par nous, qu'un catalyseur nous donne de pareilles divergences dans la nature des produits d'hydrogénation.

En résumé, nous avons isolé actuellement trois dibenzylidène-cyclopentanones. S'agit-il de corps purs? L'une d'elles représente-t-elle un mélange à point fixe? C'est ce que nous ne pouvons dire, mais il est possible que le composé F : 131° soit un mélange de cette espèce, étant donnée la nature du quatrième dépôt.

GÉOLOGIE. — *Sur l'état du problème tectonique prérifain et rifain méridional : possibilités de coordination.* Note de M. **Jean Lacoste**, présentée par M. Ch. Jacob.

MM. Marin, Blumentbal et Fallot (¹), en exposant que les paroxysmes éoalpins n'ont pas déterminé de charriages dans la partie interne du Rif, le Rif espagnol, ont remarqué que « les poussées d'âge alpin n'ont pas moins dû comprimer fortement toutes les régions du Rif externe », c'est-à-dire du Rif français, en y provoquant d'importantes dislocations.

Quelle est la nature de ces dislocations? C'est là le problème tectonique prérifain, intéressant plus spécialement les régions du Rif méridional, du Rarb et du Prérif.

(¹) A. Marin, M. Blumenthal, P. Fallot, *Observations géologiques sur le Nord-Ouest du Rif Marocain* (*Bull. Soc. géol. Fr.*, 4ᵉ série, 30, vii, 1930, p. 659-735).

Ces régions, découpées jusqu'ici et nécessairement pour l'étude en secteurs séparés, ont donné lieu à des interprétations diverses.

S'agit-il d'une vaste nappe de style alpin, comme la nappe Trias-Nummulitique envisagée par M. Daguin (¹)? Ses racines sont alors à rechercher dans le Rif méridional.

S'agit-il d'une nappe de décollement du Nummulitique, du type de celle décrite dans le Rarb par M. Bourcart (²)? Dans ce cas une zone Sud, où le recouvrement est la règle, fait suite à une zone Nord de séries normales.

Ces deux styles différents sont-ils conciliables, l'un existant dans la partie Sud-Est (Meknès-Fès), l'autre dans la partie Nord-Ouest (Rarb) d'une région aussi uniforme que l'étendue prérifaine ?

De même, si, avec Pierre Termier (³), on admet la possibilité d'une nappe de style alpin dans la zone Meknès-Fès, il paraît difficile de ne voir dans le Rarb, très semblable, qu'une tectonique salifère, une tectonique de dômes.

Dans la région de Moulay Bou Chta (Rif Méridional), qui est à la fois l'arrière pays du Prérif et du Rarb, j'ai signalé le caractère autochtone du Nummulitique ; indiqué qu'il ne s'agissait pas de nappes superposées, mais d'un style de plis déversés et d'écailles enracinées, avec accidents diapirs et extravasions de Trias, déclenchés par les pressions tangentielles ; enfin reconnu en outre des rides jurassico-crétacées, formées dès le Crétacé (⁴).

De ces différentes études sur des régions voisines composant une vaste unité géographique, une interprétation d'ensemble peut-elle être dégagée? M. Daguin, puis M. Bourcart, en des zones très difficiles où divers travaux avaient signalé des nappes empilées, ont parfaitement analysé le problème prérifain et l'on conçoit que le pays marneux du Prérif envisagé isolément suggère la notion de nappe Trias-Éocène invoquée par ces deux auteurs. Mais en abordant les régions situées au Nord, des faits nouveaux apparaissent et permettent de préciser les relations du Rif méridional avec le Prérif et le Rarb.

Si, se déplaçant de Fès vers le Nord, on recherche la nature du passage de la série nummulitique prérifaine placée dans une nappe à la série nummulitique autochtone du Nord, on reconnaît que le Rif méridional, pays

---

(¹) F. Daguin, *Contribution à l'étude géologique de la région prérifaine* (*Thèse*, Montpellier, 1927).

(²) J. Bourcart, *Problèmes soulevés par l'étude stratigraphique du Rarb Marocain* (*Livre Jubilaire du Centenaire Soc. géol. Fr.*, 1, 1930, p. 171-296).

(³) P. Termier, *Sur l'un des problèmes tectoniques du Rarb* (*Maroc*) (*Bull. Soc. géol. Fr.*, 4ᵉ série, I-II, 1928, p. 7-17).

(⁴) J. Lacoste, *Observations sur le Rif central* (*C. R. somm. géol. Fr.*, 17 mars 1930, p. 48-49).

de courtes imbrications, ne peut founir les racines d'une nappe prérifaine (¹).

Se déplaçant à travers le Rarb vers Cuezzane et le Nord-Est, on constate que la présence fréquente, même en des points très méridionaux, du Crétacé, en discordance sous le Nummulitique, rend impossible l'appréciation d'une limite entre une zone Sud où le Nummulitique serait décollé, et une zone Nord où il est autochtone (²).

En outre, dans le Prérif et dans le Rarb, des accidents dus au Trias paraissent très semblables à ceux du Trias autochtone du Nord.

Pour ces raisons, ici schématisées, il devient aujourd'hui difficile d'envisager dans ces deux régions d'importants mouvements tangentiels, nappe du deuxième genre ou nappe de décollement.

Je connais toute la valeur des arguments de M. Daguin et de M. Bourcart. Il paraît précisément intéressant de rechercher si les faits invoqués, qui, dans le cadre des connaissances antérieures, n'ont pu être interprétés que comme témoins de vastes recouvrements, ne sont pas en définitive conciliables avec des séries enracinées, localement chevauchantes, telles que j'en ai signalées dans les régions rifaines méridionales. A cette fin, il suffirait d'examiner dans le Prérif et dans le Rarb quelques points (fenêtres et lambeaux de recouvrement), tenus comme arguments principaux.

De sérieux éléments de coordination existent dès maintenant. La belle analyse stratigraphique fournie par M. Daguin lui a fait reconnaître le premier, dans le Prérif, des affleurements de Crétacé supérieur. M. Bourcart, qui a exposé d'intéressantes objections à une nappe de style alpin, a reconnu la discordance Crétacé-Éocène et envisagé l'hypothèse d'une orogénie anté-nummulitique. En décrivant les niveaux phosphatés et grèseux de l'Eocène, MM. Daguin et Bourcart ont permis des parallélismes, grâce auxquels ces niveaux peuvent être considérés comme représentant généralement la base stratigraphique réelle de l'Éocène.

Tout cela semble propre à faciliter une prochaine interprétation d'ensemble des régions prérifaines et rifaines méridionales. Elle devra dégager trois faits d'importance essentielle : la formation d'âge crétacé des rides principales, la grande extension du Crétacé à faciès marneux, l'existence de niveaux transgressifs du Nummulitique.

(¹) J. Lacoste, *Observations sur la série nummulitique prérifaine et rifaine méridionale : niveaux transgressifs et décollements* (*Comptes rendus*, 194, 1932, p. 112).

(²) J. Lacoste, *Sur la présence de Rosalina Linnei dans le Rarb* (*Maroc*) (*C. R. Somm. géol. Fr.*, 16 février 1931, p. 37-38).

GÉOLOGIE. — *Observations géologiques en Asie Mineure : les terrains à Fusulinidés.* Note de M. **E. Chaput**, présentée par M. Ch. Jacob.

On connaît en Asie Mineure quelques gisements de calcaires à Fusulines, les uns dans l'Ouest (Balia Maden), d'autres dans les chaînes méridionales; mais on n'avait pas signalé jusqu'ici les terrains à Fusulinidés dans les régions pontiques, ni dans l'Anatolie centrale. Or, pendant les explorations que j'ai faites, avec la collaboration des professeurs de l'Université de Stamboul, de 1929 à 1931, nous avons recueilli des calcaires et des grès à Fusulinidés, d'une part dans les chaînes galates, grand rameau détaché des chaînes pontiques méridionales vers l'Anatolie centrale, d'autre part dans la région de Nicée (Iznik), intermédiaire entre les chaînes pontiques proprement dites et le faisceau Est-égéen.

1° Le massif de l'Elma Dagh, au Sud-Est d'Angora, appartient aux chaînes galates. Les plis, très serrés, dirigés du Nord-Est vers le Sud-Ouest, affectent un ensemble de terrains très variés, attribués d'abord au Nummulitique, puis, plus récemment, au Paléozoïque, d'après certaines ressemblances de faciès avec le Dévonien du Bosphore. On y voit des conglomérats, des grès, des schistes et des calcaires sombres, bruns ou noirâtres. A Hassan Oghlan (30^{km} au Nord-Est d'Angora) et près de Doluntash (28-30^{km} au Sud-Ouest d'Angora), les grès, grisâtres ou bruns, renferment des Fusulines; celles de Hassan Oghlan, seules déterminables, correspondent à *Fusulina elongata* Shumard [1] et appartiennent par conséquent au Permien.

Au Sud-Est de la zone Hassan Oghlan-Doluntash, où les Fusulines ont été recueillies en place, existent certainement des calcaires à Fusulinidés; mais nous n'avons pas encore observé les bancs mêmes qui les fournissent. A 20^{km} au Sud-Est d'Angora, nous avons trouvé, dans des éboulis de Paléozoïque et de Trias, un bloc de calcaires noirs, schisteux, à nombreuses Fusulinelles (*Staffella* sp.). En outre, près de Tchuluk, à 60^{km} au Sud-Sud-Ouest d'Angora, dans une région plissée appartenant encore aux chaînes galates, nous avons rencontré un bloc de calcaire gris foncé

(1) M. Reichel, qui a examiné les Fusulines de Hassan Oghlan et de Gól Bashy, m'a signalé leur identité avec les formes recueillies en Grèce et étudiées récemment par Ozawa et Tobler. Les autres Fusulinidés ici mentionnés ont été déterminés par M. Raymond Ciry, qui les décrira ultérieurement.

à *Sumatrina Annae* Gein., *Verbeekina Verbeeki* Von Staff, etc., dans des dépôts superficiels, à matériaux à peine émoussés, provenant de la désagrégation d'un conglomérat probablement néogène.

2° Entre le lac de Nicée, le bassin de Yenishehir et la plaine de Brousse, les massifs montagneux, dont les plis sont dirigés vers l'Ouest ou le Sud-Ouest, comprennent surtout du Nummulitique, avec des zones de roches ordinairement sombres, dont l'âge était resté jusqu'ici incertain. Or, à Göl Bashy (20^{km} à l'Est-Nord-Est de Brousse), j'ai observé des alternances de grès et de calcaires sombres, reposant en discordance sur des schistes bruns. Les calcaires renferment *Fusulina elongata* Shumard; il y a ainsi une phase orogénique antérieure à la transgression permienne. Sur le prolongement de ces terrains se placent, près de Koyunhissar (40^{km} au Nord-Nord-Est de Brousse), des grès à *Sumatrina Annae* Gein. Enfin, sur les hauteurs de la Kyzyl Yaïla (60^{km} au Nord-Est de Brousse), on rencontre, épars en surface, des blocs de calcaires sombres à *Neoschwagerina Colaniae* Ozawa; mais ces calcaires n'ont pas encore été observés exactement en place.

Les terrains à Fusulinidés mentionnés ci-dessus appartiennent, ainsi, au moins pour la plus grande part, au Permien; ils établissent une série de jalons entre les terrains à Fusulinidés permiens des régions égéennes (Grèce, Balia Maden) et le Permien marin classique des régions asiatiques situées à l'Est de l'Anatolie.

GÉOGRAPHIE PHYSIQUE. — *Sur la mer quaternaire de Tombouctou.* Note de M. **Auguste Chevalier.**

J'ai signalé, il y a 31 ans, l'existence probable d'une mer, à une époque récente, dans la région de Tombouctou [1]. Herborisant en juillet 1899 dans les dunes de Tombouctou, j'avais recueilli, à la surface du sol, plusieurs coquilles du groupe *Marginella Egouen*, espèce encore vivante dans l'Atlantique sur les côtes de Mauritanie et du Sénégal. A la même époque les indigènes me rapportèrent de nombreux spécimens de la même espèce ainsi que des *Columbella rustica* (autre espèce marine) qu'ils dirent se rencontrer dans le sol aux environs de Kabarah, à 6^{km} de Tombouctou.

Le pays, à cette époque, n'était pas encore pacifié, aussi l'Administration

(1) *Comptes rendus*, 132, 1901, p. 926.

militaire m'interdit-elle d'excursionner dans ces parages. Cependant sur les conseils de M. Mabille, qui avait reconnu dans mes coquilles des formes éteintes d'espèces encore vivantes, je fis connaître ma trouvaille et j'émis l'hypothèse d'une mer tombouctienne récente.

En 1909, R. Chudeau compléta mes observations et mon hypothèse. « L'abondance des fossiles à Tombouctou, dit-il, semble indiquer que l'eau avait la même constance de température que dans l'Atlantique, ce qui ne peut guère s'expliquer que par une communication directe avec l'Océan. La mer de Tombouctou aurait rejoint par le Djouf et le Kha (dépression entre le Tagant et l'Adrar Tmar) le golfe quaternaire de Mauritanie (¹) ». Entre temps Germain avait examiné les coquilles que j'avais rapportées et avait reconnu quatre espèces renfermant en outre à leur intérieur des débris indéterminables d'autres mollusques (Cérithes et Lamellibanches (²). Cependant dans la séance du 22 novembre 1909 de la Société géologique de France, Chudeau renonçait à son hypothèse. Au dire des indigènes interrogés par son correspondant Yacouba-Dupuis, les Marginelles nommées *Koroni* (en Sonraï) auraient été apportées autrefois du Sahel pour servir de monnaie. Ces *Koroni*, affirme-t-il, devaient donc venir, soit du bassin de Taoudenni, soit plus vraisemblablement du golfe de Mauritanie, où on les connaît à l'état subfossile (Dereims). Aussi était-il d'avis qu'il fallait renoncer à la mer quaternaire de Tombouctou.

Au cours d'un récent voyage dans le Sahara et dans la partie nord du bassin du Niger, j'ai repris l'étude de cette question et je rapporte de nombreux et importants documents qui militent en faveur de la mer récente. J'ai recueilli de nouveau, et cette fois en quantité considérable, dans les rues même de Tombouctou et sur les principales places, des coquilles de *Marginella* associées à quelques *Columbella* et à de rares autres petites coquilles marines. L'étude de ces restes de Mollusques, au nombre d'une dizaine d'espèces, est confiée à M. Germain.

Ces coquilles se rencontrent, soit à la surface du sol, soit dans la couche superficielle de sable mobile, épaisse de 15 à 30^{cm} et qui recouvre le barco (argile grise, sans fossiles, épaisse de plusieurs mètres avec laquelle on construit les maisons de Tombouctou). Ces coquilles s'observent aussi en dehors de Tombouctou. J'en ai recueilli des quantités à 3^{km} au nord-est de la ville, dans le sable mobile superficiel. Ces pseudo-dunes se trouvent à environ 270^{m} d'altitude, et l'aspect de ces gisements rappelle celui des plages soulevées du littoral sénégalais, où l'on observe parfois à 15 ou 20^{m} d'altitude des coquilles de *Senilia senilis* en grande abondance. A Gao,

---

(¹) Chudeau, *Sahara soudanais*, p. 222.

(²) Germain et A. Chevalier, *L'Afrique centrale française*, p. 462

sur le Niger, à 300^{km} à l'est de Tombouctou et 260^{m} d'altitude, des indigènes m'apportèrent aussi en mélange de Marginelles de *Columbella* et de *Cardium*, en me disant qu'on les avait recueillies autrefois dans le Sahara, à peu de distance de Gao. Enfin, à 100^{km} environ dans le nord de Tombouctou, sur la route d'Araouan, au lieu dit Dayet el Narra, il existerait des quantités considérables de Marginelles et de *Cardium* (renseignement verbal de l'interprète Kalilou-Tandia).

De même, dans le Sahel, entre Nara et Némé, les Maures recueillent des Marginelles qu'ils apportent à Ségou, où l'on en faisait autrefois des colliers pour enfants (renseignement d'un indigène).

La mer quaternaire de Tombouctou communiquant avec l'Atlantique par la Mauritanie nous paraît donc avoir été une réalité. Elle a dû envoyer un golfe profond par Taoudenni jusqu'à Reggan (263^{m} d'altitude et par 26° 40′ lat. N.). On sait que la Sebka Mafergane, au sud-est de Reggan, qui n'en est distante que de 50-60^{km} est à l'altitude de 132^{m} seulement. J'ai trouvé à Reggan et à Taourirt des quantités abondantes de *Cardium* en place, mais pas de Marginelles. Enfin, il me paraît vraisemblable que la mer de Tombouctou-Gao se prolongeait vers le sud-est par un chenal et allait rejoindre le golfe de Guinée. Les salines du Dallol Fogha, à l'est de Gaya constitueraient les dernières traces de cette mer qui fut semée d'îles et d'archipels et sur l'emplacement de laquelle on retrouve dans le Sahara sud de nombreuses sebkas.

Il aurait donc existé, dans l'Ouest-Africain, une deuxième Méditerranée, reliée à l'Atlantique, non seulement par le golfe Mauritanien, mais aussi, au sud-est par un chenal ayant plus ou moins une certaine analogie avec la mer Rouge. C'est par ce chenal que les eaux du Niger et du Bani, qui débouchaient autrefois à la mer de Tombouctou par un vaste delta peuplé de Lamantins (animaux qui ont persisté dans le bief moyen), rejoignent aujourd'hui la mer.

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur les mouvements de l'air atmosphérique au-dessus de l'Indochine.* Note de M. HENRY HUBERT.

En utilisant des graphiques journaliers de sondages aérologiques effectués par le Service météorologique de l'Indochine au cours du dernier trimestre 1931, j'ai pu établir de nouveaux graphiques, reconstituant les mouvements de l'air atmosphérique pour la totalité de la période considérée,

soit pour chaque station, soit pour les stations réparties sur un même méridien.

Je me suis proposé en outre de traduire, par le dessin, l'ensemble des mouvements de l'atmosphère, à des moments donnés, pour la surface totale de la colonie et pour toutes les altitudes jusqu'à 10000 mètres. J'ai utilisé à cet effet des cartes à trois dimensions, pour lesquelles les filets d'air aux différentes altitudes sont représentés sur des plans transparents superposés. Il y a là un procédé nouveau, qui, appliqué à l'étude des mouvements de l'atmosphère, facilite largement les investigations ([1]).

Les sondages aérologiques de l'Indochine n'ayant pas été précédés d'observations directes faites en avion ou sur les sommets élevés, ou encore d'études systématiques sur la direction des nuages, il est malaisé de tirer des premiers documents graphiques établis des conclusions ayant la précision de celles formulées pour l'Afrique Occidentale ([2]). On peut toutefois considérer comme acquises les premières constatations suivantes :

1° Au même moment, sur une même verticale, et entre le sol et une altitude de l'ordre de 10000^m, les mouvements de l'air atmosphérique présentent deux ou plusieurs directions différentes.

2° Certaines différences de direction s'acquièrent progressivement et peuvent être considérées comme une simple rotation du vent avec l'altitude. Cependant, la plupart des différences observées sont brutales et traduisent des mouvements indépendants les uns des autres. Ces mouvements s'observent d'ordinaire pour des couches d'atmosphère développées en altitude souvent sur plusieurs milliers de mètres. On est fondé à considérer qu'au moins certaines de ces variations de direction sont accompagnées de variations brutales de température.

3° Ces couches d'atmosphère caractérisées par leur direction persistent, sans interruption, à certaines altitudes, pendant des périodes de plusieurs jours à une dizaine de jours et plus. En outre, si l'on ne tient pas compte des inévitables modifications de courte durée, on constate que ces couches gardent les mêmes caractères pendant un mois, parfois bien davantage. On a ainsi la preuve de l'extension de ces couches sur des surfaces considérables, au moins dans le sens de leur direction, et cela permet d'en faire

---

([1]) Ce procédé demande moins de soins à établir que le procédé de représentation des cartes donnant le relief stéréoscopique que j'ai signalé autrefois (*Comptes rendus*, **165**, 1917, p. 1059, et **176**, 1923, p. 827).

([2]) *Comptes rendus*, **194**, 1932, p. 902.

des courants aériens comparables à ceux observés en Afrique Occidentale. Toutefois, la régularité et la constance de ces courants sont beaucoup moins marquées en Indochine que dans l'Ouest africain.

4° De même encore que dans ce dernier pays, la limite commune de deux courants aériens superposés varie rapidement d'altitude en Indochine d'un jour à l'autre, mais ces variations sont ici d'une amplitude beaucoup plus grande. C'est ainsi qu'on peut enregistrer des montées ou des descentes de cette limite atteignant jusqu'à 5000^{m} pour une période de moins d'un jour.

5° Lorsqu'il y a plus de deux courants superposés, les variations d'altitude des différentes limites communes à deux courants contigus sont indépendantes l'une de l'autre pour chacune de ces limites.

6° Lorsqu'il existe à la même altitude deux courants différents, il est fréquent qu'à leur limite commune l'un deux passe au-dessus de l'autre pour continuer sa course. Lorsqu'il y a impossibilité de passage, on ne sait pas encore ce qui se produit, mais on a la ressource d'envisager des hypothèses correspondant aux observations faites au sol ou à des déviations en altitude.

7° La répartition des courants aériens accuse un régime très différent au nord et au sud de la colonie, en harmonie avec ce qu'on sait déjà du climat.

8° Il a été permis de constater également que les différences d'allure et d'extension des courants aériens correspondaient à des différences dans la répartition des nuages, de la pluie, de la température au voisinage du sol, etc., en d'autres termes du temps.

9° Enfin, dans l'intérieur de ces courants superposés, on peut observer soit des mouvements verticaux, soit des variations éphémères du vent.

BOTANIQUE. — *De l'action à distance des métaux sur les bactéries et les levures.* Note de MM. **G. A. Nadson** et **C. A. Stern**, présentée par M. Molliard.

Nous avons démontré (*C. R. Acad. Sc. de l'U. R. S. S.*, 1931) qu'en combinant l'action exercée sur les microbes par les rayons X avec l'action oligodynamique des métaux, nous obtenions un effet germicide plus fort que celui produit par chacun de ces facteurs agissant isolément. Dans ces expériences, des suspensions dans l'eau de bactéries ou de

levures étaient placées dans de petites coupes métalliques en aluminium, en cuivre, en argent, en platine et en plomb, et l'action oligodynamique de ces métaux était étudiée avant, après et en même temps que l'action des rayons X. Dans les conditions de nos expériences, les métaux se rangeaient, selon le degré de leur action germicide, dans l'ordre décroissant suivant :

$$\mathrm{Pb} > \mathrm{Pt} > \mathrm{Cu} > \mathrm{Ag} > \mathrm{Al}$$

c'est-à-dire que les métaux se rangent selon l'ordre décroissant de leurs nombres atomiques, et seul le cuivre, grâce à sa toxicité plus grande, a pris dans cette rangée la place de l'argent.

La présente Note est un communiqué préliminaire concernant nos expériences sur l'influence des métaux à distance, c'est-à-dire sans contact direct avec les cultures de microorganismes.

L'arrangement de ces expériences était le suivant.

Une suspension dans l'eau de microbes provenant de cultures pures de 24 heures était ensemencée régulièrement dans des boîtes de Petri garnies de gélose nutritive. Nous nous servions des microorganismes suivants en vue de leur sensibilité particulière : *Bacterium prodigiosum*, *Bacterium ponticum* Egor. (Bactérie lumineuse de la mer Noire) et levures *S. cerevisiæ* race de Berlin N XII.

A l'intérieur du couvercle de la boîte de Petri, au centre, était fixée une plaque métallique ronde ou quadrangulaire (5×1^{cm}) en aluminium, en cuivre ou en plomb de 1^{mm} d'épaisseur, et ce de façon que le métal ne fût nulle part en contact direct avec la culture, mais qu'il fût séparé de celle-ci par une couche d'air. Dans nos expériences le métal se trouvait à une distance de 1 à 2^{mm} de la culture; lorsque cette distance augmentait, l'influence du métal s'affaiblissait rapidement, à une distance de 5^{mm} cette influence se faisait à peine sentir et disparaissait bientôt entièrement.

Il y eut aussi un autre arrangement des essais : les plaques de métal étaient placées sur de petits supports en verre de 1^{mm} d'épaisseur posés sur la gélose nutritive de sorte que la distance entre le métal et la culture était également de 1^{mm}. Les deux dispositions des essais donnèrent des résultats absolument analogues.

Immédiatement avant chaque essai, les métaux étaient soigneusement lavés, nettoyés avec du papier d'émeri et stérilisés ensuite, dans la boîte de Petri même, à l'étuve pendant une heure à 160°.

Après l'ensemencement, les boîtes étant retournées, le couvercle portant le métal en bas (de sorte que la culture se trouvait au-dessus du métal) et étaient placées ainsi dans le thermostat à une température de 21-22°. L'expérience se faisait dans l'obscurité.

La numération des colonies développées était effectuée le 4[e] ou le 5[e] jour dans chaque série d'essais à la même heure. Durant les jours qui suivaient l'éloignement du métal nous n'observions pas d'augmentation du nombre des colonies dans le champ d'action de ce métal. On comptait le nombre des colonies développées immédiatement au-dessus de la plaque de métal de même qu'à différentes distances de celle-ci. Après une influence du métal de 4-5 jours, on s'aperçoit, en cas d'emploi du cuivre et surtout du plomb, que dans la partie de la culture disposée vis-à-vis du métal, le nombre des colonies développées et leurs dimensions sont moindres que dans les parties voisines et, surtout, moindres que chez le témoin (boîte de Petri sans métal). Le résultat des expériences apparaît avec une netteté encore plus grande lorsque l'on compare le nombre des colonies, développées sur 1^{cm^2} vis-à-vis du métal et dans les autres parties de la même culture ainsi que chez le témoin.

Il y eut en tout 37 séries d'expériences, qui donnèrent des résultats concordants.

Les trois métaux, en agissant à distance, retardent le développement des microorganismes (bactéries et levures), mais à un degré différent : l'aluminium est celui dont l'influence est la plus faible, celle du plomb est la plus forte, le cuivre se place entre les deux. Nous avons donc l'ordre suivant :

$$Pb(82) > Cu(29) > Al(13).$$

En d'autres termes, l'intensité de l'influence dépressive et germicide des métaux est d'autant plus grande que le poids atomique du métal est plus élevé.

Cet ordre est analogue à celui selon lequel les métaux retardent la fonction photogénique des bactéries lumineuses.

Ainsi que nous l'avons dit, l'action à distance des plaques métalliques se fait également sentir dans la circonférence de celles-ci; et plus le poids est élevé, plus l'espace sur lequel cette influence se répand est large.

Voici les données concernant le nombre de colonies de *B. prodigiosum* par centimètre carré :

	I.	II.	III.
Al (13)	28,0	29,7	29,2
Cu (29)	21,7	29,7	28,6
Pb (82)	13,9	24,0	27,3

I. Vis-à-vis du métal.
II. Sur un espace de 1cm de largeur à côté du métal.
III. Sur un espace de 1mm de largeur à une distance de 1cm du métal.

Le témoin dans la même direction : 31,4; 30,4; 29,4.

Nous continuons nos expériences et nous nous abstenons, pour le moment, d'expliquer le mécanisme de l'action ci-dessus exercée par les métaux à distance sur les êtres vivants.

CRYPTOGAMIE. — *Observations et remarques sur les Lichens.* Note de M. **A. de Puymaly**, présentée par M. P.-A. Dangeard.

Les auteurs qui jusqu'à présent se sont occupés de la distribution des Lichens ont envisagé cette question comme si les Lichens étaient des êtres simples, ayant des exigences vitales propres, bien différentes de celles qui appartiennent à l'Algue et au Champignon qui entrent dans leur constitution. Ils ne se sont pas demandé quelle est la part qui revient à chacun des deux constituants dans le choix de la station et dans celui du substratum, en particulier : est-ce l'Algue qui intervient ou le Champignon ou les deux à la fois? Le travail que j'ai consacré aux Algues aériennes (1) devait naturellement me conduire à aborder ce sujet.

Mes observations, encore peu nombreuses, sont cependant suffisantes pour me permettre d'exprimer dès maintenant quelques idées qui se dégagent de ces premières recherches. D'une façon générale, le Champignon joue un rôle très effacé, presque nul dans le choix de la station et dans celui du substratum en particulier, choix qui paraît être presque entièrement sous la dépendance de l'Algue. Autrement dit, si un Lichen est corticole, c'est qu'il renferme une Algue qui, à l'état libre, est ellemême corticole; si un Lichen est terricole ou muscicole, il le doit à son Algue qui, à l'état de vie indépendante, habite également sur la terre ou sur les coussinets des Mousses. Quant au Champignon, il ne recherche

(1) A. de Puymaly, *Recherches sur les Algues vertes aériennes* (*Thèse de Doctorat* de la Faculté des Sciences de Paris, 274 pages, 7 planches, Paris, 1925).

pas telle ou telle station, mais plutôt telle ou telle espèce d'Algue, qui lui permettra de se nourrir, de se développer et de fructifier.

Cette notion éclaire d'un jour nouveau l'écologie des Lichens. Elle rend compte de la distribution géographique des Lichens épiphylles, qui concorde sensiblement avec celle des Trentepohliacées prenant part à leur constitution, fait déjà noté par plusieurs auteurs. Elle explique, en outre, pourquoi dans certains cas, relativement assez fréquents, le Lichen et l'Algue qui entre dans sa composition coexistent tous deux côte à côte dans la même station, où ils mènent chacun une vie complètement indépendante. Un des exemples les plus frappants à ce point de vue est celui des Lichens hypophlœdiques, qui se trouvent à l'intérieur de l'écorce de certains arbres et dont la plupart ont pour gonidies des *Trentepohlia*, qui à l'état de liberté vivent normalement dans l'épaisseur de ces écorces. Mais ce n'est pas tout. Cette notion nouvelle permettra, je le crois, d'élucider bien d'autres problèmes écologiques : elle nous indiquera probablement comment on doit interpréter la rareté de quelques Lichens et l'ubiquité de beaucoup d'autres, pourquoi certaines espèces habitent de préférence ou uniquement les régions élevées des montagnes, tandis que d'autres sont exclusivement cantonnées sur le bord immédiat de la mer, etc. Elle apporte également quelques éclaircissements sur la véritable nature des associations algo-fongiques qui constituent les Lichens et sur lesquelles on a émis les théories les plus diverses.

En effet, si l'Algue, à l'état de gonidie, recherche les mêmes supports que ceux qu'elle occupe à l'état de vie indépendante, on est bien obligé d'admettre que, même au sein de l'association algo-fongique, elle continue à emprunter au substratum les éléments nécessaires à sa nutrition et que l'union qu'elle contracte avec le Champignon ne modifie pas sensiblement son mode de vie habituel. C'est d'ailleurs la conclusion à laquelle était déjà arrivé Treboux ([1]), il y a une vingtaine d'années, en s'adressant à une méthode toute différente, qui consistait à cultiver comparativement, dans des milieux nutritifs artificiels, la gonidie du *Xanthoria parietina* et l'Algue semblable qui vit en liberté sur les écorces des arbres.

En somme, si le Champignon donne au thalle du Lichen son aspect et sa constitution morphologiques, l'Algue semble bien en régler l'écologie et en assurer la nutrition.

([1]) O. Treboux, *Die freilebende Alge und die Gonidie* Cystococcus humicola *in Bezug auf die Flechtensymbiose* (*Berichte d. deutsch. bot. Gesellschaft*, 30, 1912, p. 69-80).

De telles considérations cadrent mal avec la théorie un peu simpliste de la symbiose lichénique. Je me borne pour le moment à les énoncer, me proposant de les développer dans une publication ultérieure et d'apporter, à l'appui, des observations précises et détaillées.

PHYSIOLOGIE. — *Automatisme cardiaque et métabolites chez les Mollusques* (Murex trunculus). Note [1] de MM. A. **Jullien** et G. **Morin**, présentée par M. F. Mesnil.

Divers auteurs ont montré que, chez les Vertébrés, certaines substances résultant du fonctionnement cardiaque (métabolites) sont capables de favoriser l'activité rythmique contractile de cœurs témoins. Des expériences effectuées à la Station de Biologie maritime de Tamaris-sur-Mer nous ont conduits à des conclusions identiques dans le cas du Mollusque Prosobranche marin *Murex trunculus*.

Si l'on fait battre une quantité importante de cœurs isolés et non tendus dans une petite quantité d'eau de mer, celle-ci acquiert des propriétés nouvelles :

1° Elle renforce l'amplitude des contractions de cœurs témoins excisés non tendus et en mouvement (effet inotrope positif).

2° Elle accélère dans de fortes proportions (quatre fois en moyenne) le rythme des pulsations de cœurs témoins pulsants. Cette accélération par son intensité et sa persistance est très différente de l'accélération minime et de très courte durée que l'on peut obtenir par excitation mécanique en transportant un cœur témoin d'un récipient dans un autre récipient contenant, comme le premier, de l'eau de mer ordinaire.

Cet effet chronotrope, positif, comme l'effet inotrope, est facile à mettre en évidence et s'obtient avec un liquide suffisamment actif dans 100 pour 100 des cas.

3° Elle se montre capable, dans un certain nombre de cas, de déclancher les contractions rythmiques de cœurs excisés témoins jusque-là inactifs. Cette dernière propriété est moins facile à mettre en évidence que les précédentes. Le pourcentage des résultats positifs varie fortement suivant les séries d'expériences; tantôt il dépasse 80 pour 100, tantôt il s'abaisse au dessous de 20 pour 100. Ces variations semblent déterminées surtout par

---

(1) Séance du 25 avril 1932.

l'état de vigueur des animaux dont proviennent les cœurs témoins et par la longueur du temps écoulé depuis leur prélèvement.

L'acquisition de ces diverses propriétés par le liquide où les cœurs ont battu paraît bien résulter de l'enrichissement de ce liquide en certaines substances élaborées et libérées pendant le travail du cœur. Jusqu'à une certaine limite, ces propriétés sont d'autant plus accentuées que les contractions cardiaques effectuées au sein du liquide ont été plus nombreuses. Elles ne se retrouvent pas lorsqu'on essaie de la même façon, sur des cœurs témoins excisés non tendus, pulsants ou non, de l'eau de mer où des cœurs nombreux ont séjourné longtemps mais sans se contracter.

Ces diverses observations convergent pour confirmer l'hypothèse que des substances résultant du fonctionnement même du cœur, donc des métabolites, sont capables à un haut degré de favoriser l'automatisme cardiaque.

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *La réaction de Jolles* (indican) *appliquée au lait.* Note de M. C. Hervieux, présentée par M. Leclainche.

En 1913, Jolles (1) publiait un procédé très sensible pour la recherche de l'indoxyle dans l'urine. Il était basé sur l'oxydation simultanée du thymol et de l'indoxyle par le réactif d'Obermayer. Cette réaction fut appliquée par la suite au sang, ainsi qu'à diverses humeurs de l'organisme.

De mon côté, j'ai essayé de l'appliquer aux différents laits (2). MM. Porcher et Tapernoux (3) critiquent la technique de détection de l'indoxyle au moyen du thymol et affirment que les colorations violacées que j'ai observées « proviennent de l'attaque du thymol en milieu chlorhydrique par le perchlorure de fer ». Je ne suis pas de cet avis.

Déjà Jolles (4), en 1915, indiquait qu'en présence du thymol seul il ne se produisait aucune coloration et que celle-ci se formait seulement par l'oxydation simultanée de l'indoxyle et du thymol.

De mon côté, je n'ai jamais pu observer de coloration du chloroforme en utilisant le thymol *seul* en présence du réactif d'Obermayer. Mes essais ont

---

(1) *Zeitsch. f. physiol. Chem.*, 87, 1913, p. 310.

(2) *Comptes rendus*, 193, 1931, p. 1480.

(3) *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 418.

(4) *Zeitschr. f. physiol. Chem.*, 94, 1915, p. 79.

porté sur des échantillons de thymol pur; l'un Raoul-Neveu (58.638), l'autre Kahlbaum (I. C. T.).

Par contre, un thymol ancien, d'origine inconnue, m'a fourni un chloroforme fortement coloré en rouge brun; résultat qui est conforme à celui obtenu par MM. Porcher et Tapernoux. Mais il s'agit d'un thymol impur et la réaction observée par MM. Porcher et Tapernoux tient vraisemblablement à l'impureté du thymol employé.

On peut répéter mes expériences en s'adressant à un lait traité par le procédé que j'utilisais au début de mes recherches et qui consiste, après acidification puis ébullition, à déféquer par l'acétate basique de plomb. Le liquide soumis à la réaction de Jolles donne après plusieurs heures, parfois le lendemain, un chloroforme coloré en mauve.

Je dois ajouter que j'ai constaté que le lactose purifié donne, avec l'acide chlorhydrique ferrique, des produits de décomposition susceptibles d'engendrer, en présence du thymol, des corps donnant au chloroforme des tons légèrement rosés. Du fait de la production de ces derniers, la réaction de Jolles, malgré sa sensibilité, perd de sa rigueur lorsqu'elle est appliquée au lait.

Cela suffirait pour ne pas en recommander l'emploi dans la recherche de l'indoxyle, à moins de la modifier après enquête sur de nouveaux faits.

BIOLOGIE. — *La phase pélagique des Amphipodes benthiques littoraux.* Note de M. **Louis Fage**, présentée par M. Ch. Gravier.

Dans une série de pêches exécutées à tous les mois de l'année, avec un simple haveneau, manié la nuit, à la surface de la mer, autour d'un foyer lumineux, nous avons réussi à capturer, soit à Banyuls, soit à Concarneau, plus de cinquante espèces benthiques littorales appartenant à seize familles différentes de Gammariens. S'il en est, parmi ces espèces, quelques-unes dont la présence, dans les conditions de temps et de lieu que nous avons choisies, puisse être considérée comme accidentelle, la plupart ont été prises avec une fréquence et une abondance telles que ces captures nous placent d'emblée devant un phénomène nouveau : la montée nocturne, régulière, vers la surface, d'une ampleur insoupçonnée, de toute une série de formes littorales vivant habituellement sur le fond.

A vrai dire, ce phénomène n'est nouveau qu'en raison de sa généralité et

du fait qu'il apparaît comme normal dans le cycle biologique de ces espèces. Certaines d'entre elles avaient bien été déjà rencontrées dans le plancton par plusieurs observateurs, mais sporadiquement, au hasard de pêches pélagiques exécutées sans suite, et sans qu'il s'en dégage la notion de régularité qui donne à ce phénomène toute son importance. Car il faut admettre, désormais, que chez les *Haustoridæ*, les *Phoxocephalidæ*, les *Oedicerosidæ*, les *Calliopiidæ*, les *Atylidæ*, les *Dexaminidæ* — pour ne citer que les familles les plus caractéristiques à ce point de vue — la majorité des espèces de nos côtes sont soumises à un rythme nycthéméral qui les fait pélagiques de surface la nuit et qui est, lui-même, sous la dépendance d'un rythme physiologique saisonnier.

A Concarneau, par exemple, l'ascension nocturne des *Urothæ* ne se produit ou ne devient régulière qu'en hiver ou au printemps, suivant les espèces; le *Metaphoxus Fultoni*, le *Perioculodes longimanus*, le *Guernea coalita* se montrent par milliers, dans les mêmes conditions, de mai à septembre; les *Nototropis guttatus* et *Schwammerdami*, le *Tritæta gibbosa* gagnent en troupe la surface pendant l'automne et l'hiver. Les essaims, très denses, de toutes ces espèces, qui se forment sous le feu du projecteur, sont composés ou bien exclusivement de mâles adultes ou d'un mélange d'adultes des deux sexes dans lequel les femelles sont en nombre infime. Mais, dans la zone non éclairée, les captures beaucoup plus pauvres en individus attestent que ceux-ci, même durant les périodes les plus favorables, se répandent en surface en ordre quelque peu dispersé et que la lumière a pour effet de grouper et de retenir ceux qui passent dans son champ d'action; et c'est ainsi que les mâles, prédominant dans le plancton, sont attirés en foule autour du foyer lumineux. Seules les espèces qui, comme l'*Apherusa bispinosa*, ne forment point d'essaims dans le plancton et ne nous ont donné qu'un petit nombre d'individus dont l'ascension se fait sans aucune régularité montrent, en zone obscure ou éclairée, une certaine égalité des deux sexes. Pour les autres, il faut admettre que les femelles ne participent qu'en très petit nombre à l'exode en surface. Si l'on considère que les mâles ont des yeux beaucoup plus développés que les femelles, que leur groupement presque exclusif autour du foyer lumineux montre leur sensibilité particulière à la lumière, on doit admettre que leur migration verticale journalière débutant au coucher du soleil n'est qu'une simple réaction aux conditions d'éclairement, qui explique la rareté des femelles en surface.

Mais il est remarquable que les quelques femelles qui se mélangent par-

fois aux mâles adultes sont elles-mêmes en pleine période de reproduction. Nous les prenons, en effet, alors que leurs oostégites sont déjà pourvus des soies sexuelles, ou bien, le plus souvent, alors qu'elles portent leurs œufs récemment pondus dans la poche incubatrice. Or, comme leur présence dans le plancton coïncide avec les périodes d'abondance des mâles en surface, nous ne pouvons nous refuser à voir entre la périodicité de ces essaimages et celle de l'activité sexuelle des reproducteurs une étroite relation. Et nous sommes ainsi amenés à penser que si les variations journalières d'éclairement peuvent se traduire normalement chez les mâles de ces espèces par une activité motrice orientée la nuit vers la surface, la crise génitale exalte la sensibilité des reproducteurs et détermine leur exode en masse, auquel les femelles peuvent alors participer dans la mesure où elles ont été ainsi sensibilisées.

BACTÉRIOLOGIE. — *Observations sur la vie de* B. caryocyaneus *Beijerinck-Dupaix en milieu lithiné.* Note [1] de MM. **Ph. Lasseur**, **P. Vernier**, **A. Dupaix** et **J. Marchal**, présentée par M. H. Vincent.

Nous résumons dans cette Note les principales particularités de la vie de *B. caryocyaneus* cultivé en milieu lithiné.

1° *Modifications morphologiques.* — Sur gélose peptone ou gélose bouillon, *B. caryocyaneus* se présente sous forme de bâtonnets isolés ou réunis par deux. La longueur des plastides oscille en général entre $0^{\mu},8$ et $3^{\mu},6$. L'addition de chlorure de lithium à la gélose nutritive détermine l'apparition de formes géantes et la production d'une belle capsule autour de chaque plastide. La capsule, très visible à l'examen microscopique, se montre nettement délimitée par une ligne fine lorsqu'on utilise l'ultramicroscope avec équipage de quartz. Nous retrouvons là des faits analogues à ceux signalés par Gamaléia (1894) et Lasseur (1911).

En dehors de ces modifications morphologiques, on observe un fait assez curieux : c'est la présence de filaments constitués par 10 à 15 plastides dont la plastide médiane mesure de 5^{μ} à 6^{μ} de long, les autres éléments ne dépassant pas $1^{\mu},5$ de long.

La règle de balancement entre l'énergie de division et l'énergie de crois-

(1) Séance du 25 avril 1932.

sance invoquée par certains auteurs est incapable d'expliquer les faits ci-dessus.

Dans ces essais, la variation de forme ne saurait être attribuée à une impureté, puisqu'il s'agit d'une file de plastides incluses dans une même gaine. De plus, les cultures qui ont servi à nos expériences proviennent d'une *plastide unique* isolée à l'aide de la technique spéciale que nous avons décrite en 1930 et 1931.

2° *Stabilité des suspensions.* — Les suspensions étudiées ont été préparées à l'aide de corps microbiens lavés trois fois à l'eau bidistillée.

Dans le tableau ci-dessous, nous indiquons l'ordre de grandeur de la vitesse de transport et de la tension superficielle des deux catégories de suspensions.

	Corps bactériens (en suspension dans l'eau bidistillée) provenant de cultures sur :	
Paramètres étudiés.	Gélose lithinée.	Gélose ordinaire.
Vitesse de transport en cm/seconde	$3,12.10^{-4}$	$3,24.10^{-4}$
Tension superficielle en dyne/cm à 22° C.....	73,2	76,2
Dilution limite d'agglutination par le sérum homologue	1/8000	1/80000

Les corps bactériens provenant de gélose lithinée précipitent plus facilement par les ions H_+ et Al_{+++} que les plastides cultivées sur gélose ordinaire. Inversement les suspensions réalisées avec les corps bactériens provenant de gélose ordinaire sont beaucoup plus sensibles à l'action du sérum agglutinant que les corps bactériens capsulés.

Cette dernière observation montre que les différents paramètres n'interviennent pas toujours de la même façon dans la précipitation des plastides par les ions à charge positive et dans leur agglutination par les sérums homologues.

3° *Perméabilité de la membrane.* — Afin de mettre en évidence la variation de perméabilité de la membrane des corps microbiens cultivés respectivement sur gélose ordinaire et gélose lithinée, nous avons déterminé la conductibilité [1] de diverses suspensions bactériennes. Celles-ci étaient constituées par des plastides préalablement lavées à l'eau bidistillée et

---

[1] Les mesures ont été effectuées à l'aide du dispositif classique. Mais, à la lecture au téléphone, nous avons substitué la lecture au haut parleur en utilisant un amplificateur basse fréquence 4 lampes.

remises en suspension ultérieurement dans de l'eau distillée ou diverses solutions d'électrolytes.

Quelques-uns des résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

N° des systèmes.	Germes provenant de cultures sur gélose.	Nature des liquides dispersifs.	Conductibilités spécifiques à 25° C., après les temps : 0	5 heures.
1.....	ordinaire	Eau bidistillée	$14,1.10^{-6}$	$15,0.10^{-6}$
2.....	lithinée	Eau bidistillée	$12,6.10^{-6}$	$17,2.10^{-6}$
3.....	ordinaire	Solution de chlorure de calcium à 0,2 pour 100	$1856,6.10^{-6}$	$2046,3.10^{-6}$
4.....	lithinée	Solution de chlorure de calcium à 0,2 pour 100	$1858,0.10^{-6}$	$2005,0.10^{-6}$
5.....	ordinaire	Solution de chlorure de calcium à 0,2 pour 1000	$232,1.10^{-6}$	$251,6.10^{-6}$
6.....	lithinée	Solution de chlorure de calcium à 0,2 pour 1000	$217,7.10^{-6}$	$237,9.10^{-6}$
7.....	ordinaire	Solution de sulfate d'alumine à 0,1 pour 100	$534,6.10^{-6}$	$594,3.10^{-6}$
8.....	lithinée	Solution de sulfate d'alumine à 0,1 pour 100	$530,2.10^{-6}$	$587,1.10^{-6}$
9.....	ordinaire	Solution de sulfate d'alumine à 0,1 pour 1000	$107,5.10^{-6}$	$119,8.10^{-6}$
10.....	lithinée	Solution de sulfate d'alumine à 0,1 pour 1000	$103,3.10^{-6}$	$111,9.10^{-6}$

Lorsque l'on transporte des plastides provenant d'une jeune culture dans de l'eau bidistillée, il faut s'attendre à ce qu'il diffuse de la plastide, une certaine quantité d'électrolytes. Les nombres observés dans ces conditions d'expérience sont relativement voisins les uns des autres et étant donnée la précision des mesures pour des résistances de l'ordre de 20000 à 100000 ohms, il faut être très prudent dans l'interprétation des résultats.

Sous ces réserves nous constatons que, dans l'eau bidistillée, une plastide entourée d'une capsule laisse diffuser beaucoup plus facilement des substances ionisables que les éléments dépourvus de capsule. On observe un phénomène analogue lorsque les corps microbiens sont mis en suspension dans l'eau additionnée de chlorure de calcium à 0,2 pour 1000; dans tous les autres cas, les germes cultivés sur gélose lithinée laissent moins diffuser de substances ionisables que les éléments bactériens provenant de cultures sur gélose ordinaire.

En résumé : la culture de *B. caryocyaneus* sur gélose lithinée provoque des modifications morphologiques, des variations de perméabilité de la membrane et du pouvoir fixateur des plastides.

MÉDECINE EXPÉRIMENTALE. — *Vaccination de l'homme contre la fièvre jaune.* Note de MM. **A. W. Sellards** et **J. Laigret**, présentée par M. Charles Nicolle.

Les travaux de Max Theiler ont montré que la souris est sensible au virus de la fièvre jaune (souche « française »). Lorsqu'il lui est inoculé par voie cérébrale ce virus provoque, chez elle, sauf exceptions très rares, une infection mortelle. La maladie est indéfiniment transmissible de souris à souris. Les sérums d'hommes ou de singes, guéris de fièvre jaune, protègent, en mélange, la souris contre l'inoculation intracérébrale.

Theiler a constaté en outre que le virus après un certain nombre de passages par la souris, a perdu sa virulence pour le singe, mais qu'il lui donne l'immunité. Cette affirmation a été contestée, tout au moins en partie, par Dinger.

La virulence du virus-souris pour l'homme était seulement connue, jusqu'à ces derniers temps, par l'étude des contaminations accidentelles de laboratoire. Elle avait été faite, sur trois cas, par Berry et Kitchen. Dans ces trois cas, l'infection s'était traduite par une maladie bénigne. Le sang des malades, inoculé à des singes sensibles, avait déterminé tantôt une infection légère, tantôt une maladie inapparente, toujours suivies d'immunité. Le sérum des malades guéris protégeait les singes contre des inoculations, mortelles pour d'autres singes témoins.

Nous avons cherché à utiliser le virus-souris pour la vaccination de l'homme contre la fièvre jaune. Sawyer, Kitchen et Wray Lloyd avaient abordé le même problème par une voie différente : celle de la séro-vaccination. Mélangé à un immun-sérum, le virus-souris ne détermine, chez l'homme, que des réactions insignifiantes et il donne l'immunité. Cette immunité peut être facilement mise en évidence par le pouvoir protecteur du sérum vis-à-vis de la souris (épreuve intrapéritonéale de Sawyer et Lloyd) et vis-à-vis des singes. Dans la pratique, il serait malheureusement très difficile de constituer des réserves d'immun-sérum suffisantes pour vacciner toute la population des régions où la fièvre jaune est endémique.

Nous avons utilisé, pour nos essais sur l'homme, tout d'abord, un virus-souris tué (par le chloroforme), et nous avons constaté que ce virus mort ne vaccine pas. L'apparition des anticorps dans le sérum ne se manifeste, en effet, qu'après inoculation de virus vivant. Il suffit, d'ailleurs, de très petites quantités de ce virus vivant pour les faire apparaître ainsi qu'en témoignent les résultats que nous rapportons ci-après.

Nous avons inoculé des émulsions, d'abord extrêmement faibles, puis plus concentrées, de virus vivant (cerveaux de souris infectées) à cinq sujets atteints d'affections nerveuses chroniques, justiciables d'un traitement pyrétothérapique.

Le virus, au début de nos essais, avait subi 134 passages par souris.

La technique employée a été la suivante :

Des souris, inoculées dans le cerveau, étaient sacrifiées mourantes, entre le sixième et le dixième jour de l'inoculation. Les cerveaux, prélevés, étaient utilisés soit immédiatement, soit après congélation et conservation au frigorifique. Au moment de l'emploi, les cerveaux sont broyés et émulsionnés dans de l'eau physiologique, additionnée de 10 pour 100 de sérum de lapin (4^{cm^3},5 par cerveau). Cette émulsion mère (correspondant à une dilution au 1/10e) est centrifugée pendant 3 à 4 minutes. Le liquide surnageant est dilué à son tour. Une goutte de la dilution à 1/10000e tue régulièrement la souris inoculée par voie intracérébrale.

Avant tout traitement, le sang des sujets à vacciner a été éprouvé au point de vue du pouvoir protecteur. Nous avons toujours constaté l'absence de ce pouvoir chez les sujets neufs. Vaccinés, nos sujets ont été suivis au point de vue température, pouls et albuminurie. Des prélèvements de sang, effectués une semaine après chaque inoculation, ont permis de mettre en évidence l'apparition dans le sérum des substances protectrices.

En opérant dans ces conditions, nous avons pu constater que :

1° 1^{cm^3} d'une émulsion centrifugée de cerveau de souris, diluée à 1/10000e, ne provoque, chez l'homme, aucune réaction (voie sous-cutanée). Cette même dose détermine régulièrement l'apparition du pouvoir protecteur du sérum pour la souris.

2° 1^{cm^3} d'une émulsion à 1/1000e est également supporté sans réaction.

3° 1^{cm^3} de l'émulsion à 1/100e, injecté d'emblée, a produit, chez un sujet, une très légère ascension thermique à 38°, au 6e-7e jour. Il y a eu bradycardie et présence de traces d'albumine dans les urines. Ces divers symptômes n'ont été décelés que par un examen systématique, le sujet n'accusant, de lui-même, aucun trouble.

4° La même émulsion à 1/100e est parfaitement supportée, sans qu'on puisse déceler le moindre trouble, si son inoculation a été précédée d'une première injection à 1/10000e ou 1/1000e. Nous avons pu ainsi, en injectant à 15 jours d'intervalle des doses croissantes, inoculer, sans aucune réaction, en une seule fois 3^{cm^3} d'une émulsion au 1/10e non centrifugée, ce qui correspond à plus de la moitié d'un cerveau de souris, donc approximativement à 3000 doses minima immunisantes.

5° Le pouvoir protecteur du sérum a été manifeste du 7e au 34e jour

après la vaccination. Il est probable qu'il dure beaucoup plus longtemps; mais nos recherches ne sont pas encore assez avancées pour nous permettre de l'affirmer.

Les sérums des individus, vaccinés par nous, vont être éprouvés sur les singes et les résultats de cette épreuve seront publiés ultérieurement.

Dès maintenant, il nous est permis de conclure que :

1° Le virus-souris, dilué dans les proportions que nous avons indiquées, détermine chez l'homme une infection amarilique inapparente;

2° Cette infection inapparente est suivie d'immunité, ou, tout au moins, de l'apparition rapide d'anticorps, capables de protéger la souris contre une inoculation mortelle.

Ces conclusions semblent bien indiquer que la vaccination de l'homme contre la fièvre jaune est réalisable. Elle serait réalisée, actuellement au mieux, avec deux injections successives du virus-souris : la première représentant 1^{cm^3} d'une dilution de cerveau de souris à $1/10000^e$, la seconde 1^{cm^3} d'une dilution à $1/100^e$. Dans les conditions où nous avons opéré, ces doses ont été parfaitement supportées. Nous pensons que les résultats que nous rapportons pourraient servir de base à des essais de vaccination de la population dans les régions où la fièvre jaune reste menaçante.

A $15^h 40^m$ l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à $16^h 5^m$.

A. Lx.

ERRATA.

—

(Séance du 7 décembre 1931.)

Note de M. *B. N. Prasad*, Sur la convergence de la série conjuguée d'une série de Fourier :

Page 1160, ligne 21, *au lieu de* $\psi(t)$, *lire* $\Psi(t)$; ligne 22 dans la seconde intégrale *au lieu de* $\Psi(t)$, *lire* $\psi(t)$.

Page 1161, ligne 4 dans la première intégrale, *au lieu de* $\psi(t)$, *lire* $\Psi(t)$; ligne 16, *au lieu de* O, *lire* o; dernière ligne dans le dernier crochet, *au lieu de* $\frac{2}{nt^2}$, *lire* $\frac{2}{nt^3}$.

(Séance du 28 décembre 1931.)

Note de M. *B. N. Prasad*, Sur la sommabilité de la série conjuguée d'une série de Fourier :

Page 1386, ligne 23, *au lieu de* $\sin^2\frac{nt}{2}$, *lire* $\sin^2\frac{t}{2}$.